LES

INTÉGRAPHES

LA COURBE INTÉGRALE ET SES APPLICATIONS

ÉTUDE

SUR UN

NOUVEAU SYSTÈME D'INTÉGRATEURS MÉCANIQUES,

PAR

Br. ABDANK-ABAKANOWICZ.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.

Quai des Augustins, 55

—

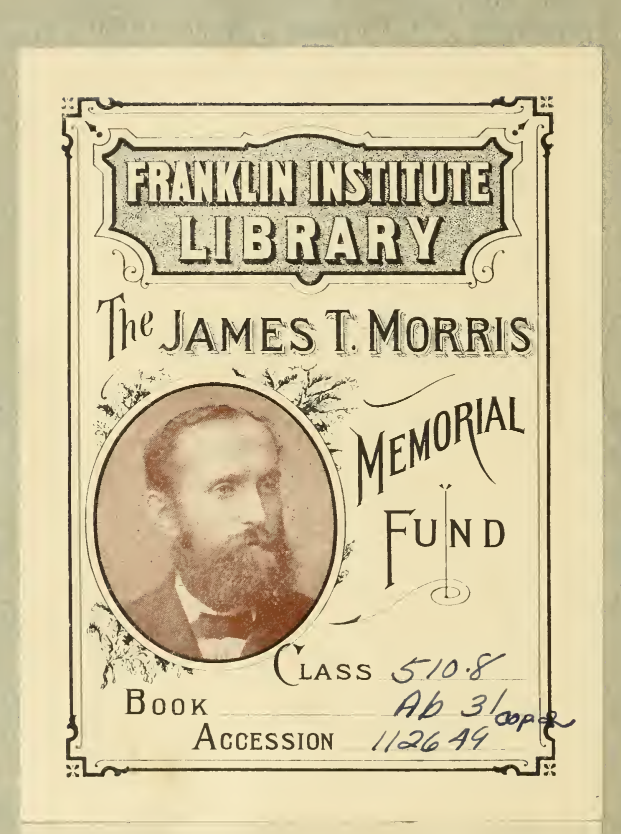
1886

3187.87

395.87

155701

510.8
Ab31
cop. 2


FRANKLIN INSTITUTE
LIBRARY
The JAMES T. MORRIS
MEMORIAL
FUND
CLASS 510.8
BOOK Ab 31 cop2
ACCESSION 112649

REFERENCE

Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
Gordon Bell

http://archive.org/details/lesintegraphes18abda

[illegible]

Pressed Specimens

LES

INTÉGRAPHES.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins

LES

INTÉGRAPHES

LA COURBE INTÉGRALE ET SES APPLICATIONS

ÉTUDE

SUR UN

NOUVEAU SYSTÈME D'INTÉGRATEURS MÉCANIQUES,

PAR

Br. ABDANK-ABAKANOWICZ.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.

Quai des Augustins, 55

1886

(Tous droits réservés.)

LIBRARY of
THE
FRANKLIN
INSTITUTE

PRÉFACE.

L'étude que nous publions aujourd'hui est le résumé d'une série de recherches, poursuivies depuis plusieurs années, dans le but d'obtenir des intégrateurs mécaniques destinés au tracé de la courbe intégrale.

D'une façon générale, les intégrateurs mécaniques sont des instruments qui effectuent, dans certaines conditions et par des moyens purement mécaniques, la sommation d'une série infinie de grandeurs infiniment petites. Ces dernières peuvent d'ailleurs être les éléments soit d'une aire limitée par une courbe, soit d'une grandeur complexe quelconque, travail mécanique, chaleur, énergie électrique, etc., le problème à résoudre se ramenant toujours à la solution d'une intégrale définie.

L'origine de cette espèce d'appareils est assez récente ; les intégrateurs datent tous de ce siècle (1); il n'y a donc pas lieu d'être surpris si leur nombre est encore restreint et leurs applications rares.

La mesure des aires est un des problèmes qui se présente le plus souvent dans les sciences appliquées et il est d'ailleurs possible d'y ramener tous les autres problèmes; aussi est-ce de ce côté que les premiers inventeurs dirigèrent leurs recherches, s'appliquant à remplacer de longs et fastidieux calculs numériques par une simple opération mécanique.

---

(1) On attribue la première idée des planimètres à Hermann, de Munich, qui l'aurait publiée en 1814. L'appareil d'Oppikofer de Berne date de 1827 et celui de Gonella de Florence de 1828.

112649

Il nous suffira de rappeler ici les planimètres d'Amsler-Laffon, aussi remarquables par la simplicité des principes mis en jeu que par les qualités pratiques de leur construction.

Les intégrateurs destinés à la totalisation de certains effets physiques variables, comme, par exemple, les intégrateurs dynamométriques, sont d'un emploi beaucoup moins fréquent.

On se bornait d'ailleurs, dans tous les appareils de cette nature, à rechercher le *résultat final* de l'intégration; ainsi les planimètres donnent simplement la mesure numérique de la surface considérée; les totalisateurs dynamométriques, la somme du travail dépensé ou produit pendant un certain laps de temps : aucun d'eux ne peut fournir par des indications continues la loi intime suivant laquelle a été effectuée la sommation.

Le but de nos recherches a été tout autre.

Nous avons cherché à construire des intégrateurs qui non seulement effectuent la somme totale des éléments, mais donnent encore, sous forme de tracé graphique d'une courbe, la loi complète qui régit la sommation, permettant de suivre pas à pas, pour ainsi dire, le progrès de l'intégration et faisant connaître la succession des phases par lesquelles elle a passé.

La courbe tracée par nos intégrateurs n'est autre chose que la *courbe intégrale,* dont nous exposons en quelques mots la théorie dans le premier Chapitre de cette étude.

Nous avons donné le nom d'*intégraphes* [1] à ce nouveau genre d'intégrateurs, que nous croyons pouvoir affirmer avoir été les premiers à construire.

Il serait superflu d'insister longuement sur l'importance du

---

[1] Le mot *intégraphe* n'est pas régulièrement formé. L'appareil devrait s'appeler *intégrographe,* d'après les règles ordinairement adoptées pour la formation des termes techniques latino-grecs, si tant est qu'il y ait des règles immuables pour la formation de ces mots barbares. Je trouve du reste que le mot *intégraphe* est aussi compréhensible que celui d'intégrographe et il a sur ce dernier l'avantage d'être plus facile à prononcer.

résultat obtenu, qui est le tracé mécanique de la courbe intégrale, ce tracé pouvant servir de point de départ à des opérations géométriques d'une grande utilité dans certaines applications pratiques. Quelques exemples suffiront à donner une idée de ces applications.

S'agit-il, par exemple, d'une aire limitée par un contour quelconque, le tracé des courbes intégrales permettra, indépendamment de la mesure de cette aire, la solution de plusieurs problèmes planimétriques tels que la division de l'aire donnée en parties proportionnelles à des nombres quelconques; ce même tracé permettra encore d'obtenir, avec la plus grande facilité, le moment statique et les moments d'inertie par rapport à un axe quelconque situé dans le plan de la courbe. Un autre exemple tiré de la Statique graphique mettra encore mieux en relief l'importance des opérations basées sur la connaissance de la courbe intégrale. Ainsi, en partant de la courbe représentant la charge d'une poutre, nous pouvons, à l'aide des courbes intégrales, obtenir successivement les efforts tranchants, les moments fléchissants et enfin la ligne élastique.

Le domaine de la physique, où la sommation des éléments infiniment petits de la forme $y\,dx$ se rencontre à chaque instant, offre des applications sans nombre. Si l'on connaît, par exemple, la forme d'un courant induit, la courbe intégrale donnera le moyen de connaître, non seulement la quantité totale d'électricité développée dans l'induit, mais encore la forme du courant inducteur.

Pour bien montrer quelle est l'étendue et la variété des applications de l'intégraphe, nous avons passé en revue les principales d'entre elles dans le cinquième Chapitre de cette étude. Citons ici en particulier :

Les problèmes planimétriques, la résolution des équations numériques, la recherche des moments de divers ordres et des centres de gravité, le problème du transport des terres, le calcul graphique des poutres, la théorie des voûtes, les problèmes de

construction navale, l'étude des systèmes en mouvement, les problèmes électriques, etc.

Nous avons dit que l'*idée première* qui a présidé à la conception de nos appareils était nouvelle; les *moyens* mécaniques dont nous nous sommes servis dans leur réalisation matérielle diffèrent également des principes cinématiques mis en jeu dans les anciens intégrateurs. On aurait pu, il est vrai, transformer ceux-ci en intégraphes, mais l'expérience nous a montré que cette transformation entraînerait de trop grandes complications. Aussi avons-nous été conduits à rechercher des combinaisons nouvelles.

Le principe cinématique qui leur sert de base, et que l'on trouvera exposé dans le deuxième Chapitre, a donné lieu à des simplifications notables; il s'applique surtout fort bien à des appareils de ce genre, en ce sens qu'il supprime les glissements, cause principale des erreurs auxquelles sont sujets certains intégrateurs.

Le troisième Chapitre contient la description des différentes formes des intégraphes que nous avons construits jusqu'à ce jour. Les premiers modèles datent des années 1878 et 1879. En 1880, nous avons publié une brochure (¹) sur ce sujet, dont le présent ouvrage n'est qu'une seconde édition considérablement augmentée. Dès lors, nous avons apporté, ainsi qu'on le verra au cours de cette étude, des perfectionnements notables aux appareils primitifs, cherchant à les rendre aussi pratiques et aussi précis que possible.

Indépendamment de nos recherches, M. C.-V. Boys, de l'École royale des Mines de Londres s'est occupé du même sujet, à partir de 1881. Ignorant de nos travaux antérieurs, mais partant du même principe cinématique, il a construit un modèle de machine à intégrer qui fonctionne d'une manière satisfaisante, malgré sa construction fort primitive. Mais M. Boys ne s'est occupé que peu de

---

(¹) *Intégrateur*. Varsovie 1880.

temps de la courbe intégrale et il a dirigé ses travaux vers les applications pratiques du nouveau principe cinématique en l'adaptant aux indicateurs-totalisateurs des machines à vapeur et aux compteurs d'énergie électrique. Il convient, du reste, d'ajouter que M. Boys est l'auteur de nouveaux perfectionnements dans ce genre d'intégrateurs et que ses travaux ont efficacement contribué au développement des intégraphes. Nous sommes heureux de trouver ici l'occasion de rendre justice à son mérite.

Les modèles les plus récents de nos intégraphes ont été combinés en collaboration avec M. Napoli, inspecteur principal du chemin de fer de l'Est et chef du laboratoire d'essais de cette compagnie.

M. D. Napoli a contribué, pour une large part, au perfectionnement des intégraphes, en m'apportant le concours d'une longue expérience, d'une connaissance profonde du sujet et d'une extrême habileté dans la construction des instruments de précision [1].

En ce qui concerne plus spécialement le présent travail, nous nous sommes efforcés de rester, autant que possible, sur le terrain des applications pratiques, sans entrer dans les développements théoriques auxquels la considération des courbes intégrales se prête si facilement.

Il est vraiment curieux que l'étude de cette courbe ait été jusqu'à présent à ce point négligée, dans les livres qui traitent des applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie; et pourtant la courbe intégrale, indépendamment de ses nombreuses applications pratiques, présente encore un grand intérêt lorsqu'on la considère au point de vue de ses relations géométriques avec la courbe donnée dont elle provient. L'étude de ces rapports peut donner lieu à des développements intéressants sur lesquels nous aurons peut-être à revenir un jour.

---

(1) Les nouveaux modèles d'intégraphes sont construits par la maison P. Barbier et Cie, 5, place du Panthéon, Paris.

Nous avons cherché à nous enquérir de l'époque à laquelle on a commencé à s'occuper des applications de la courbe intégrale. Il résulte des recherches faites à l'École du Génie maritime, que la théorie et les applications à l'architecture navale des courbes intégrales y étaient professées d'une façon complète avant 1840 par M. l'ingénieur Rossin, et les mêmes méthodes y sont encore appliquées aujourd'hui.

Nous reproduisons sommairement ces méthodes dans le cinquième Chapitre, d'après les renseignements que nous devons à l'obligeance de M. J. Pollard, sous-directeur de cette École.

Parmi les différentes études qui, depuis, ont traité de la courbe intégrale et de ses applications, nous pouvons citer les ouvrages suivants :

Zmurko, *Cours de Mathématiques;* Léopol, 1864. — Solin, *Ueber graphische Integration;* Prague, 1872. — Nehls, *Die graphische Integration;* Hanovre, 1877. — Abakanowicz (B.), *L'Intégrateur. La courbe intégrale et ses applications;* Varsovie, 1880. — Boys (C.-V.) *An integrating machine. Philosophical Magazine;* 1881.

Comme il arrive d'ordinaire avec les choses nouvelles, quelques réclamations de priorité se sont élevées au sujet de nos intégraphes. Nous les avons soigneusement notées dans le courant de notre étude et nous y avons répondu en citant des dates.

Je tiens, avant de terminer cette courte notice, à remercier M. le Dr Cornelius Herz, directeur de la *Lumière électrique*, pour les clichés qu'il a très obligeamment mis à ma disposition, MM. Gauthier-Villars pour les soins tout particuliers donnés à l'édition de cette étude, et MM. Brosser et Meylan qui ont bien voulu se charger du travail ingrat de la revision et de la correction des épreuves.

LES INTÉGRAPHES.

CHAPITRE PREMIER.

LA COURBE INTÉGRALE.

1. *Définition de la courbe intégrale.* — Le but principal de cette étude est de décrire les instruments destinés à tracer *la courbe intégrale.* Nous allons donc commencer par examiner les propriétés de cette courbe.

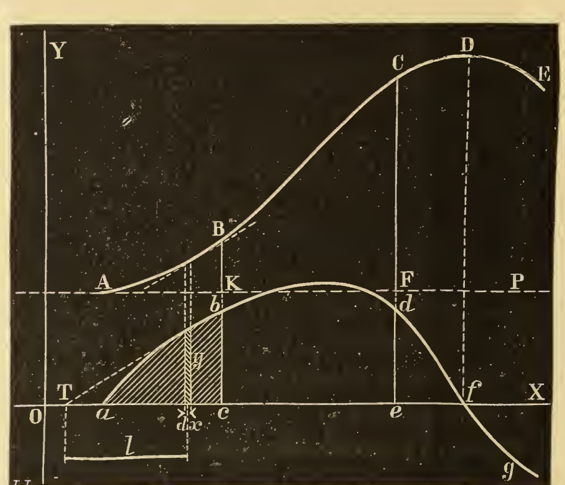
Soit *abdfg* (*fig.* 1) une courbe donnée quelconque. Dans le cas où son équation est connue, il est facile de trouver, par les procédés ordinaires de l'intégration, l'aire de cette courbe, c'est-à-dire la surface comprise entre la courbe donnée, l'axe des x et deux ordonnées arbitraires.

Traçons une autre courbe ABCDE telle, que chaque ordonnée, mesurée à partir de la droite AP parallèle à OX, passant par le point initial A, représente l'aire comprise entre la courbe donnée, l'axe des x, le point a et l'ordonnée choisie. Ainsi une ordonnée quelconque BK sera proportionnelle à l'aire *abc*, CF à l'aire *abde* . . . ; BK, multipliée par une longueur l choisie comme unité, donne un parallélogramme dont l'aire est égale à *abc*. Nous appelons la courbe ABCDE *la courbe intégrale* par rapport à *abdfg* qui est *la courbe différentielle* correspondante. La forme de la courbe intégrale indique la manière dont croît l'aire de la courbe donnée. Si nous considérons cette aire comme étant composée d'une série d'éléments infiniment petits, ayant comme base dx et comme hauteur y (voir *fig.* 1), la courbe intégrale nous

montre les différentes phases de la sommation de ces éléments. Là où les y deviennent plus grands, l'inclinaison de la courbe intégrale devient plus grande et inversement.

En général la courbe intégrale représente la somme $\int y dx$, et elle donne non seulement le résultat final (ce que font mécaniquement les planimètres), mais elle montre encore comment varie cette

Fig. 1.



sommation. (J'ai donné le nom d'*intégraphes* aux appareils traçant cette courbe.)

Soit (*fig.* 2) OMN la courbe donnée dont l'équation est

$$y = f(x). \tag{1}$$

Traçons la courbe intégrale STW dont l'équation sera

$$Y = \int f(x)\, dx + C. \tag{2}$$

La constante C est représentée par l'ordonnée initiale OS.

Différentions l'équation (2) :

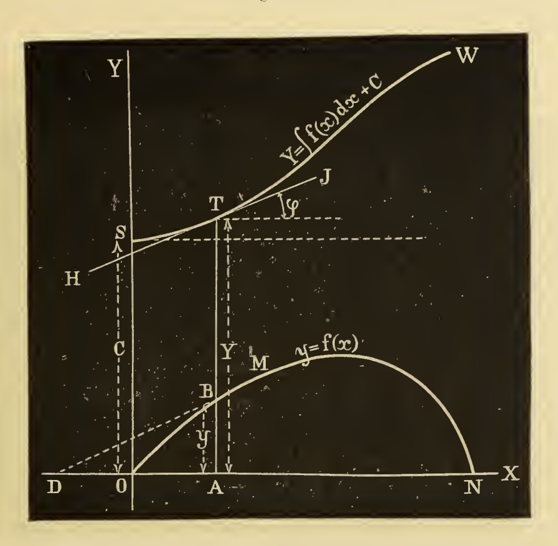
$$\frac{dY}{dx} = f(x) = y = \operatorname{tang}\varphi,$$

en appelant φ l'angle que forme la tangente à la courbe intégrale avec l'axe des x.

Nous voyons que y, l'ordonnée de la courbe donnée, a pour valeur la tangente trigonométrique de l'angle φ.

Or, si nous portons, de A en D, une longueur égale à l'unité et si nous joignons B et D, la tangente HJ à la courbe intégrale sera parallèle à DB, puisque la tangente de l'angle BDA est égale à y.

Fig. 2.



On peut trouver aussi facilement la tangente en un point quelconque de la courbe intégrale.

On peut suivre aussi une marche différente : si c'est la courbe STW qui est donnée par son équation $Y = F(x)$, chaque ordonnée y de la courbe différentielle correspondante OMN aura pour valeur la dérivée $\frac{dY}{dx}$.

2. *Tracé approximatif de la courbe intégrale.* — La propriété fondamentale de la courbe intégrale donne le moyen de la tracer d'une manière approximative ([1]).

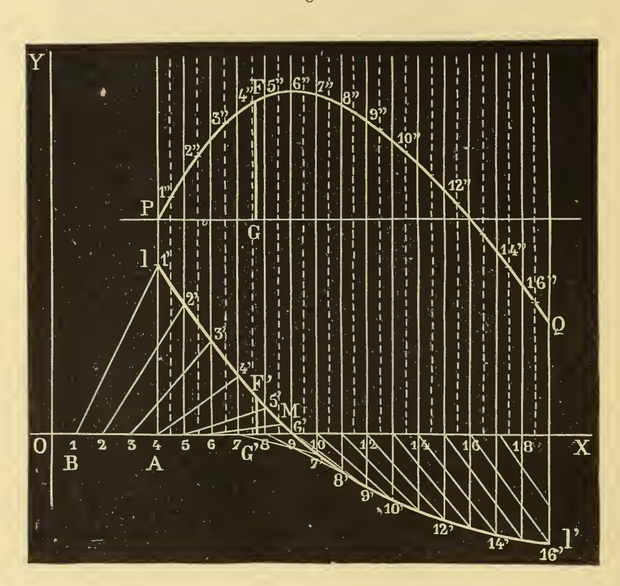
Soit ll' (*fig.* 3) ([2]) une courbe donnée quelconque.

([1]) ZMURKO, *Wyklad matematyki*, (LWOW, 1864.)
([2]) *Integrator*; 1880, p. 5.

Traçons une série de droites équidistantes et parallèles à OY, dont la distance commune soit égale à un sous-multiple de l'unité choisie pour l'échelle du dessin, soit AB. (Dans le cas de la figure nous avons divisé AB en trois parties.) Menons maintenant la série des lignes 1 1′, 2 2′, 3 3′, ..., dont les projections sur l'axe des x sont égales à l'unité.

D'un point P quelconque de la verticale de A menons une paral-

Fig. 3.



lèle à 1 1′, et prolongeons-la jusqu'à la médiane du premier intervalle, puis par le point 1″ ainsi obtenu, menons une ligne 1″2″ parallèle 2 2′. En continuant ainsi à mener des parallèles à la série des droites 1 1′, 2 2′, ..., nous obtiendrons une ligne polygonale P1″2″3″ ..., qui s'approchera d'autant plus de la courbe intégrale que le nombre de divisions sera plus grand. L'ordonnée FG, par exemple, représentera (à l'échelle de transformation AB) la surface A1F′G′. Dans ce procédé, on assimile la courbe donnée à un polygone à côtés droits, dont les sommets se trouvent en 1′, 2′, 3′ .... Soit

$$y = ax + b$$

l'équation d'un côté quelconque de ce polygone. En intégrant nous obtiendrons

$$Y = \frac{ax^2}{2} + bx + C.$$

Cette équation représentera la partie correspondante de la courbe intégrale. On voit que c'est une parabole à axe vertical. La courbe intégrale PFQ sera donc composée d'arcs paraboliques dont on a tracé les tangentes P1″, 1″2″, 2″3″, ... Les points d'intersection de ces tangentes se trouvent sur les verticales pointillées, ainsi placées pour satisfaire à la propriété connue de la parabole.

Pour faciliter la description nous appellerons dorénavant les droites 1 1′, 2 2′, 3 3′, qui donnent la direction des tangentes à la courbe intégrale, les *directrices*.

Ce procédé simple de tracer la courbe intégrale donne des résultats assez précis, si l'on effectue les constructions avec soin. Il est surtout très facile à appliquer, en faisant usage de papier quadrillé.

3. *Rapports généraux entre une courbe donnée et sa courbe intégrale.* — La courbe intégrale 1′, 2′, 3′, ... de la *fig.* 4 est faite d'après la photographie d'un tracé obtenu par l'intégraphe. La courbe donnée 1, 2, 3, ... était choisie de manière à indiquer les principaux cas particuliers qui se rencontrent dans la pratique.

Les deux courbes sont rapportées à l'axe des x commun.

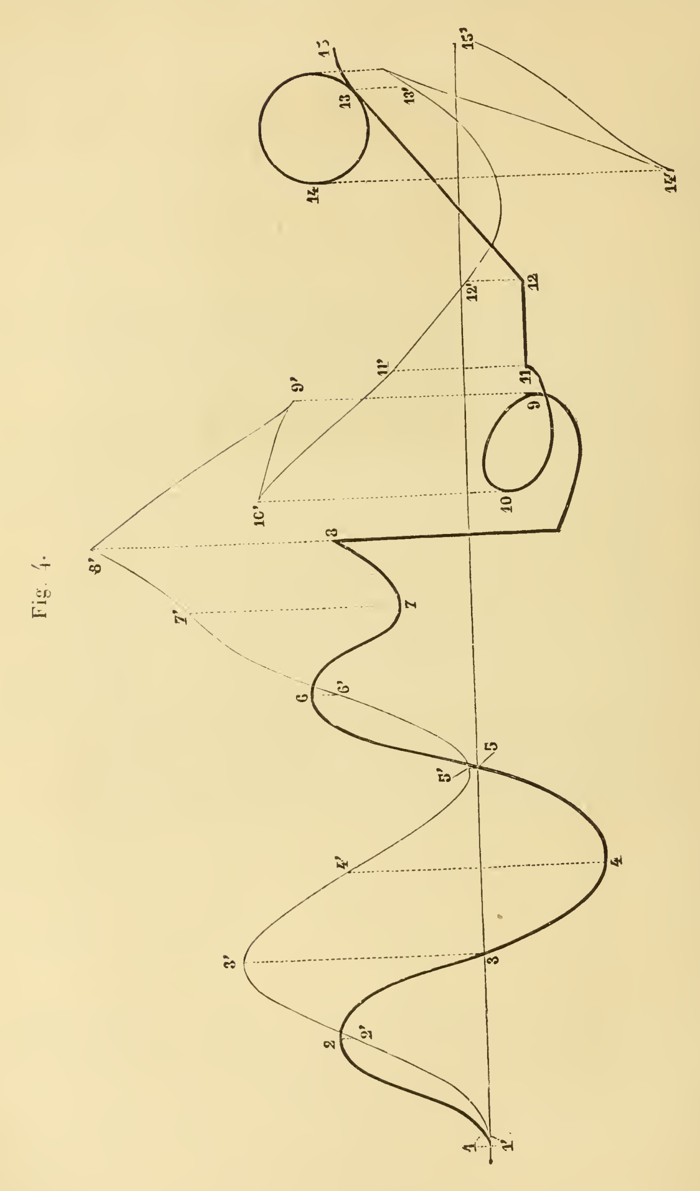
Comme le point de départ de la courbe donnée se trouve sur l'axe des x, le premier élément de la courbe intégrale est horizontal. En général, en tous les points où la courbe donnée coupe l'axe des x, les tangentes à la courbe intégrale sont horizontales.

On le voit aux points 1′, 3′, 5′, qui correspondent aux points 1, 3 et 5.

En chacun de ces points, la courbe intégrale passe par un maximum ou un minimum. Ceci met en évidence la règle d'après laquelle, pour une fonction quelconque, on trouve les maxima et les minima, en posant la dérivée égale à o.

Les ordonnées de la courbe 1, 2, 3, ..., sont proportionnelles à $\frac{dy}{dx}$, si l'on admet que la courbe 1′, 2′, 3′, ... est représentée par l'équation $y = f(x)$.

Pour les points 2, 4, 6, 7, ... où les ordonnées de la courbe



donnée passent par des valeurs maxima et minima, la courbe intégrale présente des *points d'inflexion*.

Au point 8, nous rencontrons une partie droite et verticale. La courbe intégrale présente en *ce point* un angle dont la grandeur est en rapport avec la longueur de la partie verticale de la courbe donnée.

A partir du point 9 de notre figure, la courbe donnée forme une boucle et la partie correspondante de la courbe intégrale présente deux *points de rebroussement.*

Entre 11 et 12, on rencontre une portion *droite, parallèle à l'axe des x;* la courbe intégrale affecte alors la forme d'une *droite inclinée* entre 11′ et 12′.

Soit $y = b$ l'équation de la droite (11, 12); en intégrant, on obtient

$$Y = bx + C$$

pour l'équation de la partie correspondante (11′, 12′) de la courbe intégrale. On voit que c'est une droite dont le coefficient angulaire est égal à b.

La partie située entre 12 et 13 est une *droite inclinée* à laquelle correspond, dans la courbe intégrale, un *arc de parabole* 12′, 13′. (*Voir* n° 2.) Le sommet de la parabole se trouve au point où la droite (12, 13) coupe l'axe des x.

Nous aboutissons enfin à un cercle dont la courbe intégrale présente des points caractéristiques de rebroussement.

Cette courte analyse des rapports entre les deux courbes nous montre comment un intégraphe peut être utile pour la représentation des résultats fondamentaux des applications géométriques du Calcul infinitésimal.

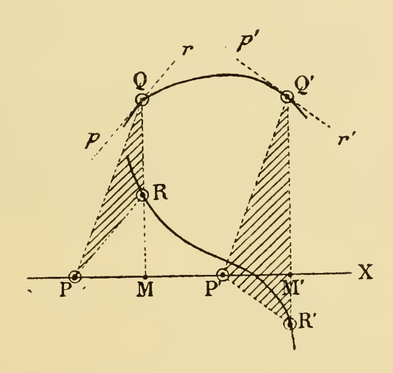
CHAPITRE II.

NOUVEAU PRINCIPE CINÉMATIQUE DES INTÉGRATEURS.

---

4. Au point de vue cinématique, le problème de la construction de la courbe intégrale peut être posé de la manière suivante : Réunir, par un mécanisme convenable, trois points P, Q, R

Fig. 5.



(*fig.* 5) assujettis, pendant le mouvement, à remplir les conditions suivantes :

a) Le point P doit se déplacer le long de l'axe des x.

b) La projection de PR, sur l'axe des x, doit toujours être égale à celle de PQ.

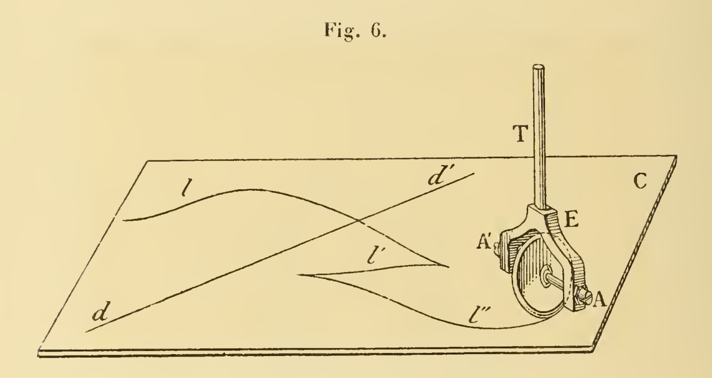
c) Le point Q doit se mouvoir à chaque instant parallèlement à PR.

Si ces conditions, qui ressortent des propriétés géométriques de la courbe intégrale, sont remplies, le point Q tracera nécessairement la courbe intégrale correspondante à la courbe différentielle parcourue par le point R.

5. *Propriétés de la roulette.* — Ainsi que dans la plupart des intégrateurs existants, une roulette constitue la partie essentielle de mes appareils, seulement j'utilise des propriétés différentes de cet organe. Cette roulette est appuyée contre une surface (ordinairement un cylindre) sur laquelle elle peut rouler librement, sans glissement, en suivant toujours la direction de son plan de rotation. Cette roulette peut aussi imprimer à la surface sur laquelle elle est appuyée un mouvement de translation, sans se déplacer elle-même, ou encore la roulette et la surface peuvent se mouvoir simultanément.

Cette roulette r est montée ordinairement comme l'indique

Fig. 6.



la *fig.* 6. Son axe de rotation est porté par un étrier E, et son plan est perpendiculaire à l'axe AA'.

Une roulette de ce genre, suffisamment appuyée contre la surface C, possède cette propriété remarquable, qu'elle ne peut se mouvoir que dans la direction de son plan. Si nous la plaçons en d, en l'orientant dans la direction dd' et si nous la faisons avancer en maintenant son orientation, elle décrira une droite dd'. Même en faisant un certain effort, il est difficile de la faire dévier de son chemin. Cet effort ne doit pas évidemment être plus grand que la résistance de frottement entre la roulette et la surface sur laquelle elle roule; ce frottement d'ailleurs peut être augmenté dans des proportions considérables si l'on exerce un effort d'appui plus grand.

Si, pendant la marche, on change l'orientation du plan de la rou-

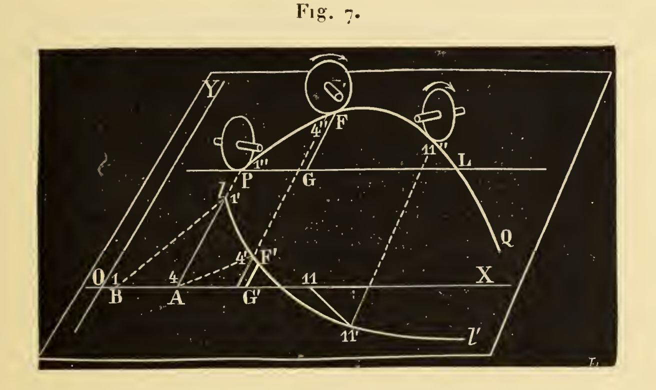
lette, ainsi que le sens de mouvement, on obtient des courbes du genre $l l' l''$, indiquées sur la *fig*. 6.

Une autre propriété remarquable de la roulette consiste dans ce fait que, pendant le tracé, malgré le changement de direction il n'y a pas de *glissement* entre la roulette et la surface C.

La roulette n'avance qu'en vertu de son roulement sur la surface, et elle pivote autour de son point de contact quand on change de direction.

6. *Tracé de la courbe intégrale au moyen de la roulette.* —

Fig. 7.



La méthode approchée de tracer la courbe intégrale, indiquée sur la *fig*. 3 m'a servi de point de départ dans la conception d'un appareil traçant mécaniquement la courbe intégrale.

Considérons (*fig*. 7) la même courbe que sur la *fig*. 3, représentée en perspective sur un plan. Posons sur le même plan, en un point P quelconque situé sur la même ordonnée que le point $1'$, une roulette et dirigeons-la de manière que son plan soit parallèle à la directrice $11'$. Imprimons-lui un mouvement de roulement, qui ne peut s'effectuer que dans la direction de son plan. *Si à chaque instant nous maintenons le plan de la roulette parallèle aux directrices, elle tracera la courbe intégrale*, ainsi que cela est indiqué sur la figure.

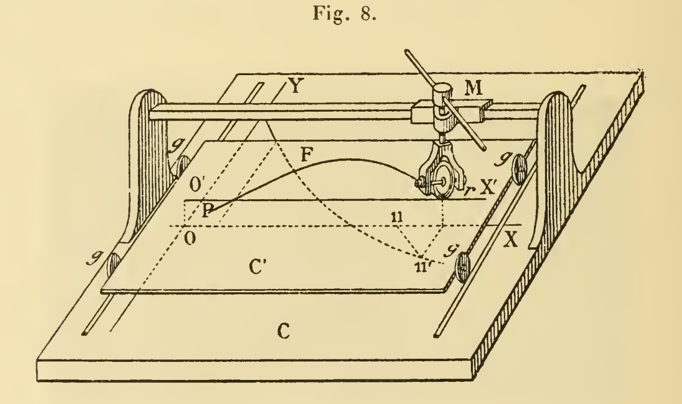
Comme la roulette ne touche théoriquement qu'en un point le plan OXY, il n'y aura point de glissement pendant le changement

de direction et comme elle peut tourner autour de son axe, elle ne glissera pas non plus en avançant dans la direction de son plan.

La quantité dont s'avance la roulette suivant la direction de l'axe des y mesure l'intégrale. La grandeur de la roulette ne joue aucun rôle.

Modifions maintenant les conditions du problème. Empêchons la translation de la roulette dans la direction des y et donnons au plan du dessin la liberté de se mouvoir dans cette direction,

Fig. 8.



comme c'est indiqué sur la *fig.* 8 (¹). Le manchon M, qui porte l'axe vertical de la roulette r est mobile le long d'une barre parallèle à OX. Le plan C', contre lequel est appuyée la roulette, est monté sur des galets g,g, qui lui permettent de se déplacer dans la direction des y.

Plaçons la roulette en un point qui se trouve au-dessus du point d'intersection de l'axe des x et de la première ordonnée, et imprimons à cette roulette un mouvement de translation (le long de la barre), tout en maintenant son plan parallèle aux directrices; le plan C' subira une translation suivant OY si l'adhérence est suffisante, et la roulette tracera la courbe intégrale PF.

Cette même propriété de la roulette, qui consiste en ce qu'elle

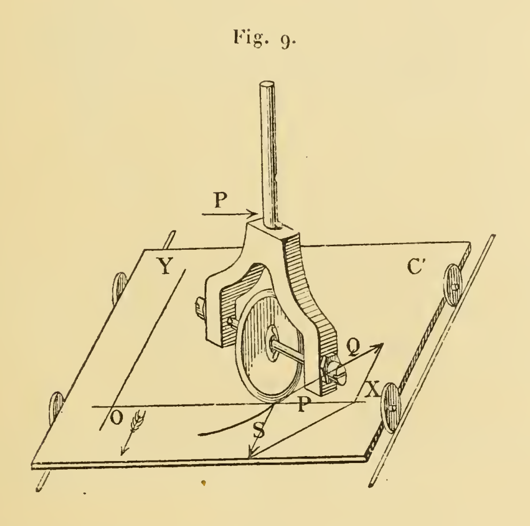
(¹) Un modèle de ce genre a été présenté par nous à l'Académie des Sciences, le 20 mars 1882.

ne peut se mouvoir que dans la direction de son plan, obligera la surface sur laquelle elle est appuyée à prendre un déplacement compatible avec les liaisons particulières auxquelles cette surface est assujettie, et de se mouvoir conformément à l'inclinaison de la roulette.

Il est facile de se rendre compte des réactions qui se produisent au point de contact ([1]).

Soit P l'effort avec lequel nous poussons la roulette dans la direction OX (*fig.* 9). Nous transportons cet effort au point

Fig. 9.



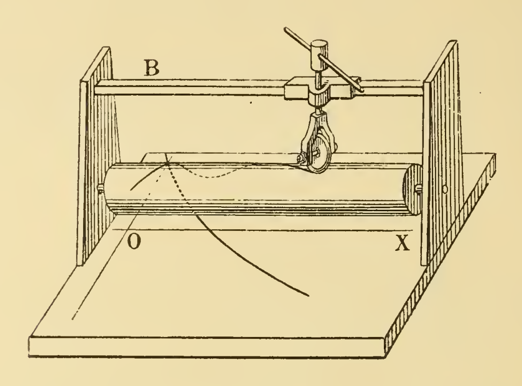
de contact de la roulette et de la surface C′, et nous le décomposons selon la règle du parallélogramme des forces en deux composantes Q et S : l'une Q suivant la direction du plan de la roulette, et l'autre S parallèlement à OY, direction dans laquelle le plan C′ peut se mouvoir.

Si l'adhérence entre la roulette et le plan C′ est supérieure au frottement de roulement des galets, le plan se déplacera ; autrement la roulette glisserait le long de OX. Il est toujours possible, comme la pratique le montre, de régler l'effort d'appui en sorte que la roulette ne glisse pas.

([1]) *Integrator*; 1880.

Revenons maintenant à la *fig.* 8. Substituons au plan C′ un cylindre à génératrices parallèles à OX (*fig.* 10) faisons mouvoir la roulette le long de la barre B, et orientons convenablement

Fig. 10.



son plan. On obtiendra évidemment sur la surface du cylindre le tracé de la courbe intégrale. Le cylindre tournera autour de son axe avec une vitesse et dans un sens déterminés par l'orientation de la roulette.

7. *Vis à pas variable.* — Nous pouvons maintenant envisager le principe cinématique de mes intégrateurs à un autre point de vue.

Fig. 11.

Soient R et Q (*fig.* 11) deux points, dont l'un doit suivre la courbe donnée, et l'autre doit tracer la courbe intégrale. Il est évident que le rapport de la vitesse de translation du point Q (qui se trouve sur la même ordonnée que R) dans la direction des y, à celle dans la direction des x est égal à la tangente de l'angle RPM.

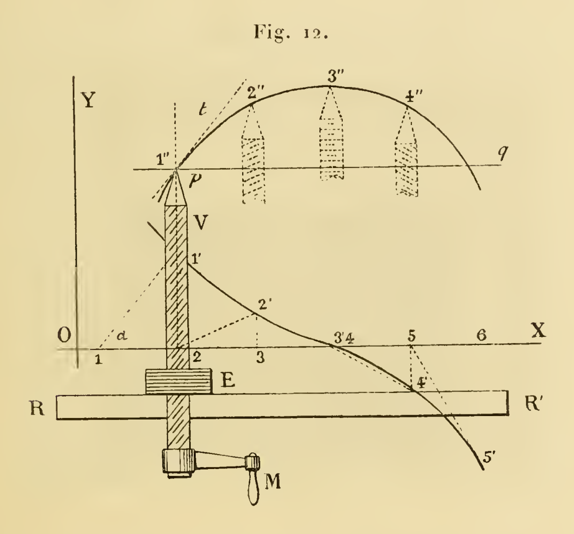
Il s'agit de réaliser mécaniquement cette transformation des vitesses.

Soit $1'\,2'\,3'\,4'$ (*fig*, 12) la courbe donnée et $1''\,2''\,3''\,4''$ la courbe intégrale correspondante. Plaçons sur le plan du dessin une règle RR′ parallèle à OX. Une vis V, ayant son axe parallèle à OY, munie d'une manivelle M, peut tourner dans son écrou E, pouvant

se déplacer, sans tourner, le long de la règle. Si nous imprimons à l'écrou un mouvement de translation, sans tourner la vis, la pointe décrira une droite $p\,q$, parallèle à OX. Mais si, en même temps, nous tournons la manivelle et déplaçons l'écrou avec des vitesses *constantes*, la pointe p décrira une droite inclinée t, laquelle, pour une vitesse déterminée, sera parallèle à la directrice 1, 1′, et dans le cas indiqué sur la *fig.* 12, parallèle au filet de la vis.

Pour que la pointe p, décrive la courbe intégrale 1″ 2″ 3″ ..., il

Fig. 12.



faut, toutes choses égales d'ailleurs, que l'inclinaison des filets varie à chaque instant, comme c'est indiqué en pointillé sur la figure.

La vitesse d'avancement de la vis variera alors avec l'inclinaison des filets, proportionnellement à tang α, et la pointe p suivra la courbe 1″ 2″ 3″, ...

Il est facile de voir que, dans ces conditions, un point quelconque de la surface intérieure de l'écrou décrira, par rapport à la vis, une courbe héliçoïdale, laquelle, développée sur un plan, représentera la courbe intégrale. Le filet de la vis sera dès lors une hélice à pas variable (¹).

(¹) *Integrator*; 1880, p. 12 et 18.

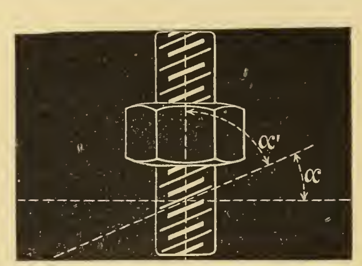
8. *Différents cas qui se présentent dans les applications de la vis à pas variable.* — Admettons que nous ayons à notre disposition une vis, dont nous pouvons varier à volonté l'inclinaison des filets, et examinons les différents modes d'utilisation d'un appareil de ce genre pour la construction de la courbe intégrale.

Considérons une vis quelconque et son écrou (*fig.* 13) et examinons les différents modes de mouvement d'un tel système.

a) Maintenons l'écrou en place et tournons la vis. Le rapport de la vitesse de translation de la vis, dans le sens de son axe, à sa vitesse angulaire est proportionnel à tang α.

b) Inversement, empêchons l'avancement de la vis, et laissons

Fig. 13.



à l'écrou la liberté de se déplacer, sans tourner : le rapport de la vitesse de son déplacement à la vitesse angulaire de la vis sera proportionnel à tang α.

c) Empêchons la vis de tourner et imprimons à l'écrou un mouvement de rotation sur place. La vis va monter ou descendre avec la même vitesse.

d) Laissons la vis immobile et tournons l'écrou. Il se déplacera le long de la vis avec une vitesse proportionnelle à tang α.

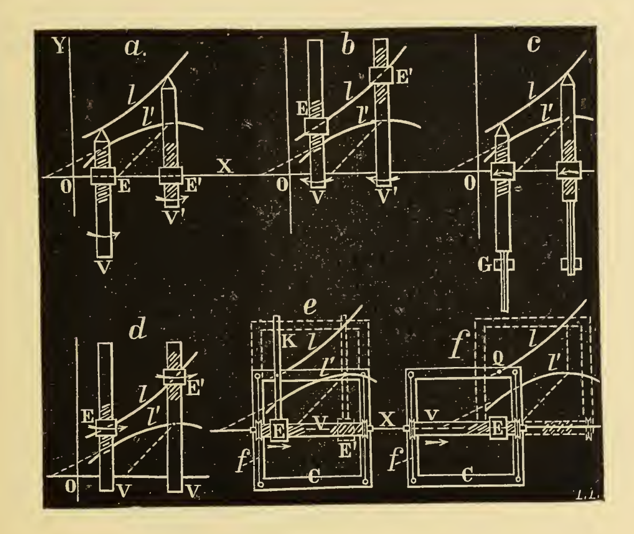
e) Empêchons le mouvement de translation de la vis tout en lui laissant la liberté de tourner et poussons l'écrou dans la direction de l'axe, sans le tourner. La vis va se mettre à tourner et le rapport de la vitesse angulaire de la vis à la vitesse de translation de l'écrou sera proportionnel à tang α'.

f) Si nous maintenons l'écrou immobile, et que nous poussions la vis dans la direction de son axe, le rapport de la vitesse angu-

laire de la vis à la vitesse de son déplacement axial sera proportionnel à tang α'.

Supposons que l'inclinaison des filets de la vis en question varie selon les besoins de l'intégration ; on voit facilement comment on pourra appliquer cette vis au tracé de la courbe intégrale. La *fig.* 14 montre les différentes solutions qui découlent des considérations examinées précédemment. Nous avons indiqué par les

Fig. 14.



mêmes lettres a, b, c, d, e, f, les différents cas mentionnés au début de ce paragraphe.

La même courbe donnée l' et la même courbe intégrale l sont tracées pour tous les cas, afin que l'on puisse bien voir les relations qui existent.

Examinons le cas a. Supposons que l'écrou E se déplace sur l'axe des x sans tourner, et que la vis reste parallèle aux ordonnées. Si nous tournons cette vis pendant le déplacement de l'écrou le long de l'axe des x, avec une vitesse proportionnelle à ce déplacement, et si l'inclinaison des filets varie toujours comme celle des directrices, un point quelconque de l'axe de la vis décrira la courbe intégrale l; c'est la disposition indiquée sur la *fig.* 12.

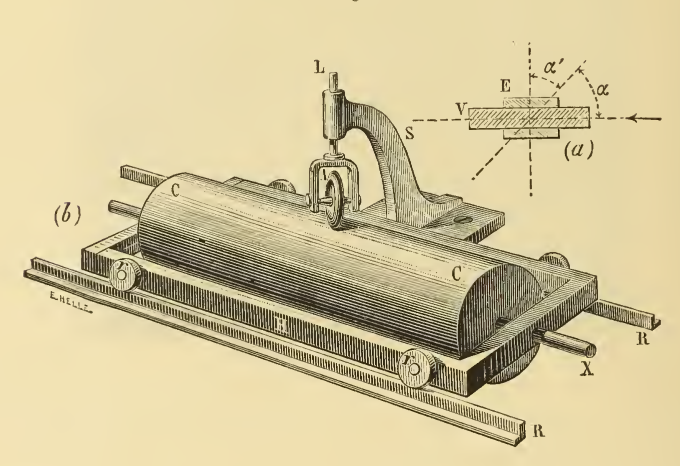
Dans tous les autres dispositifs de la figure, nous retrouvons

l'application des différents autres cas. Dans les cas *e* et *f* la rotation de la vis est transmise à un cadre mobile, par l'intermédiaire d'un fil enroulé autour des poulies calées sur la vis. Dans ces derniers cas, la transmission du mouvement aux cadres devient inutile, en remarquant qu'un point quelconque de l'écrou décrit sur la périphérie de la vis la courbe intégrale. Les cadres ne servent qu'à retracer la courbe sur un plan auxiliaire.

9. *Réalisation mécanique de la vis à pas variable.* — La *fig.* 15 représente un modèle servant à démontrer le principe cinématique des intégrateurs : la *vis à pas variable* (¹).

Un chariot H monté sur des galets *r* et portant un cylindre C

Fig. 15.



mobile autour de son axe peut se mouvoir le long des rails R, R. Une roulette A, à axe horizontal, et dont le plan peut pivoter autour de l'axe vertical L, appuie avec une certaine force sur la surface du cylindre.

Dans ce système, le cylindre C représente la *vis* et la roulette A l'*écrou*.

(¹) *Intégrator;* 1880, p. 12. — *Comptes rendus;* 21 février 1881, 20 mars 1882 et 7 novembre 1882. — *Voir* aussi l'article de M. Marcel Deprez, dans la *Lumière électrique*, T. VI, 1882.

Admettons que l'adhérence (fonction de la pression) entre la roulette et le cylindre soit suffisante pour qu'il n'y ait pas de glissement à craindre. Plaçons la roulette sous un certain angle et tournons à la main le cylindre ; il va s'avancer avec son chariot et la périphérie de la roulette se développera sur la surface du cylindre, en décrivant une hélice. Mais nous remarquons en même temps que, pendant cette opération, nous pouvons facilement changer l'orientation de la roulette d'une manière continue, et faire varier à volonté la vitesse de translation du cylindre le long des rails, proportionnellement à la tangente de l'angle formé par le plan de la roulette et un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre C. En effet, si nous plaçons la roulette perpendiculairement à l'axe du cylindre, celui-ci n'avancera pas. En faisant varier l'orientation, la vitesse de translation croîtra proportionnellement à tang α, si α représente l'angle formé par l'axe de la roulette et l'axe du cylindre. Pour $\alpha = 90^\circ$, c'est-à-dire quand le plan de la roulette passera par l'axe du cylindre, cette vitesse devrait être, théoriquement du moins, infinie. Ce cas limite mathématique irréalisable, montre qu'il y a une limite pratique à l'emploi de ce couple cinématique, à partir de laquelle les divers mouvements relatifs sont modifiés par les glissements.

En disposant ce système de vis à pas variable, selon les indications de la *fig.* 12, on verra facilement comment on pourrait tracer la courbe intégrale, en utilisant la translation du cylindre sur les rails, comme dans la figure schématique 12, on se servait de la vis qui avançait dans son écrou.

On remarquera aussi que la même courbe intégrale se trouvera tracée par la roulette, sur la surface du cylindre C.

Si l'on entourait le cylindre d'une feuille de papier et si l'on imprégnait d'encre la périphérie de la roulette, on obtiendrait sur ce papier le tracé de la courbe intégrale.

Le même modèle peut être appliqué dans le cas f du n° 8. On disposera alors l'axe du cylindre parallèlement à l'axe des x, et l'on poussera le cylindre sur les rails, en donnant à la roulette l'orientation indiquée par les directrices. Le cylindre se mettra à tourner, et la courbe intégrale se trouvera tracée sur sa surface. La vitesse de rotation sera proportionnelle à la tangente de l'angle formé par le plan de la roulette et l'axe du cylindre. On pourra développer la

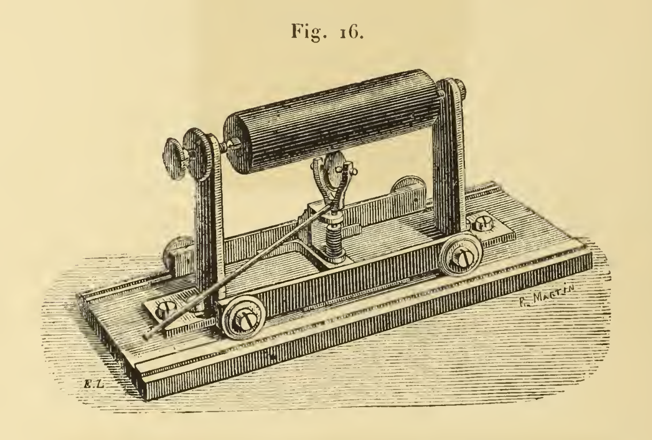
courbe sur un plan en se servant du cadre mobile, comme c'est indiqué sur la *fig.* 14, *f*.

Si l'on donne à la roulette la liberté de se déplacer le long d'une génératrice du cylindre, on obtiendra le modèle indiqué par la *fig.* 16.

L'axe du cylindre est porté par deux paliers fixes. La roulette est portée par un chariot, monté sur quatre galets et pouvant se déplacer parallèlement à l'axe du cylindre.

Si l'on donne une certaine orientation au plan de la roulette et

Fig. 16.



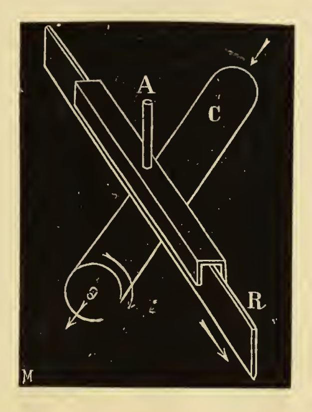
si l'on fait tourner le cylindre, le chariot portant la roulette va s'avancer. C'est le cas *b* du n° 8 et de la *fig.* 14. La vitesse de translation sera proportionnelle à l'angle α formé par la roulette et un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre (comparez avec la *fig.* 13).

La courbe intégrale se trouvera tracée sur la surface du cylindre, l'axe des y étant parallèle aux génératrices. Inversement, si l'on pousse le chariot, le cylindre se mettra à tourner. C'est le cas *e* du n° 8. L'axe des x est alors parallèle à l'axe du cylindre.

Nous pouvons obtenir une nouvelle disposition en augmentant indéfiniment le rayon de la roulette. Nous obtenons alors une règle droite R (*fig.* 17), guidée dans une gaine, qui peut tourner autour de l'axe A. Cette règle appuie contre le cylindre et remplit le même office que la roulette.

Réciproquement nous pouvons, sans rien changer à la roulette, faire croître indéfiniment le rayon du cylindre, qui se transforme

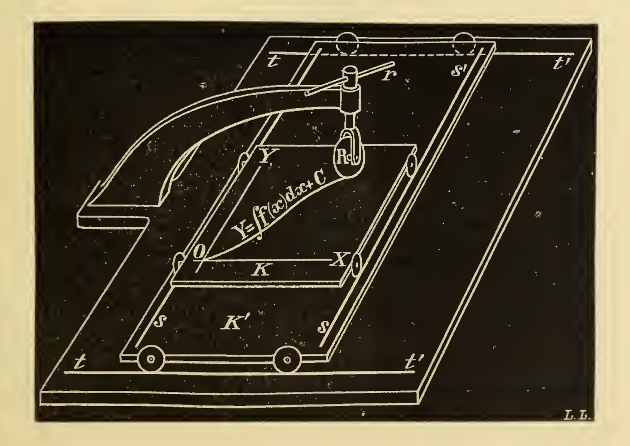
Fig. 17.



en une surface plane. Le modèle de la *fig.* 15, ainsi modifié, est représenté schématiquement par la *fig.* 18.

Le cylindre C est remplacé par un plan K. La rotation du cylindre

Fig. 18.



autour de son axe devient une translation sur des galets, roulant sur des rails s, s, montés eux-mêmes sur un chariot K′, qui remplace le chariot H de la *fig.* 15.

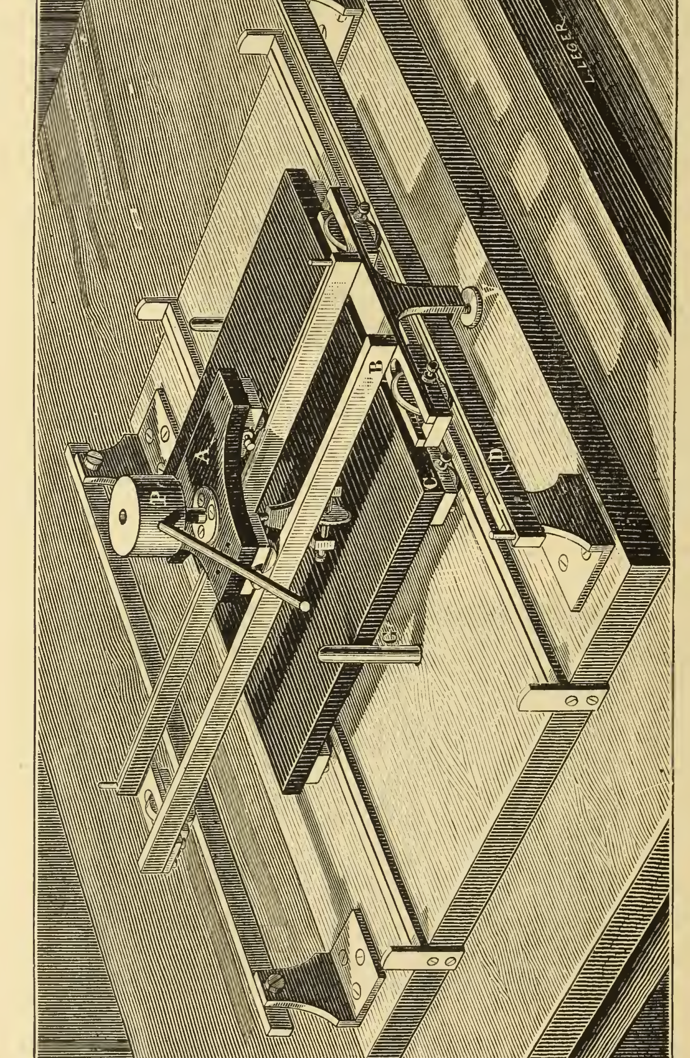


Fig. 19.

Si l'on pousse le chariot K' dans la direction tt', le plan K va avancer ou reculer sur les rails s, s, suivant l'orientation de la roulette; réciproquement, si l'on pousse le plan K dans la direction ss', c'est le chariot K' qui se déplace.

Dans le premier cas, la roulette tracera la courbe intégrale si on l'oriente convenablement à chaque instant.

Le modèle représenté par la *fig.* 19 montre la réalisation pratique de tous les cas où le cylindre est remplacé par un plan. Ce plan C est monté sur quatre galets, qui lui donnent la liberté de se mouvoir le long de rails fixés au socle de l'appareil quand on enlève les goupilles G. Contre ce plan appuie la roulette, chargée d'un poids P. L'axe de la roulette est porté par un chariot à galets A, pouvant se déplacer le long des traverses B, qui forment à leur tour un chariot mobile le long des rails D; une vis de serrage V permet de fixer ce chariot à un endroit quelconque.

Serrons la vis V, enlevons les goupilles G, et poussons le plan C sur ses rails. Le chariot A se déplacera sur les rails B, et la roulette décrira sur le plan C la courbe intégrale, si on lui donne les orientations convenables. C'est le cas b du n° 8. L'axe des x est perpendiculaire aux rails B.

Nous obtiendrons le cas c en déplaçant le chariot A et en maintenant toujours la vis V serrée. Le plan C se déplacera et la courbe intégrale aura son axe des x parallèle aux rails B.

Desserrons maintenant la vis V, pour rendre libre le chariot B, et enfonçons les goupilles G. Quand nous imprimerons au chariot B, un mouvement de translation sur les rails D, le chariot A se déplacera sur les rails B avec une vitesse proportionnelle à la tangente de l'angle formé par la roulette et l'axe des x, parallèle à D. C'est la réalisation du cas d du n° 8 et de la *fig.* 14, dans lequel c'est l'écrou qui se déplace le long d'une vis qui ne peut pas tourner.

C'est cette dernière disposition du modèle indiqué par la *fig.* 19, qu'affectent la majorité des intégraphes construits jusqu'à présent.

CHAPITRE III.

LES INTÉGRAPHES.

Nous allons voir, maintenant, comment le principe cinématique décrit dans le chapitre précédent a été appliqué à la construction des appareils destinés à tracer pratiquement la courbe intégrale. J'ai donné le nom d'*intégraphes* à ce nouveau genre d'instruments.

10. *Les premiers intégraphes* [1]. — Les deux modèles représentés par les *fig.* 20 et 21 sont presque identiquement les mêmes, sauf quelques détails de construction. Ces deux instruments ont été faits par moi en 1878 et 1879 [2]. Pour comprendre leur fonctionnement il suffit de s'en rapporter au cas *a* du n° 8 et de comparer ces instruments aux *fig.* 12 et 15.

La planchette A (*fig.* 20) est mobile le long de la glissière RR, le mouvement étant guidé par une rainure et une languette; cette planchette porte deux supports NN maintenant par l'intermédiaire de deux pointes la tige D.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Cracovie*, mars 1880; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 21 février et 7 mars 1881.

[2] Je crois pouvoir affirmer que ces appareils ont été les premiers qui aient permis de résoudre le problème de la construction de la courbe intégrale. Comme la question de priorité a été soulevée plusieurs fois dans ces dernières années, je crois devoir citer ici un extrait du rapport de la Commission nommée par l'Académie des Sciences de Paris, à qui la question fut soumise en 1885 et dont voici la teneur : « *Il résulte, en effet, des pièces que M. Ab. nous a communiquées que, dès* 1879, *il avait résolu le problème de construire la courbe intégrale.* » Je n'ai connaissance d'aucun intégraphe construit avant cette date. En outre, je puis ajouter que les inventeurs qui ont imaginé après moi des appareils de ce genre ont tous, à l'exception de Zmurko (voir n° 16), fait usage du principe cinématique sur lequel mes intégraphes sont basés.

Un fil inextensible L L fixé aux supports MM passe autour de la poulie à gorge p calée sur la tige D.

Il résulte de cette disposition que tout glissement de la plan-

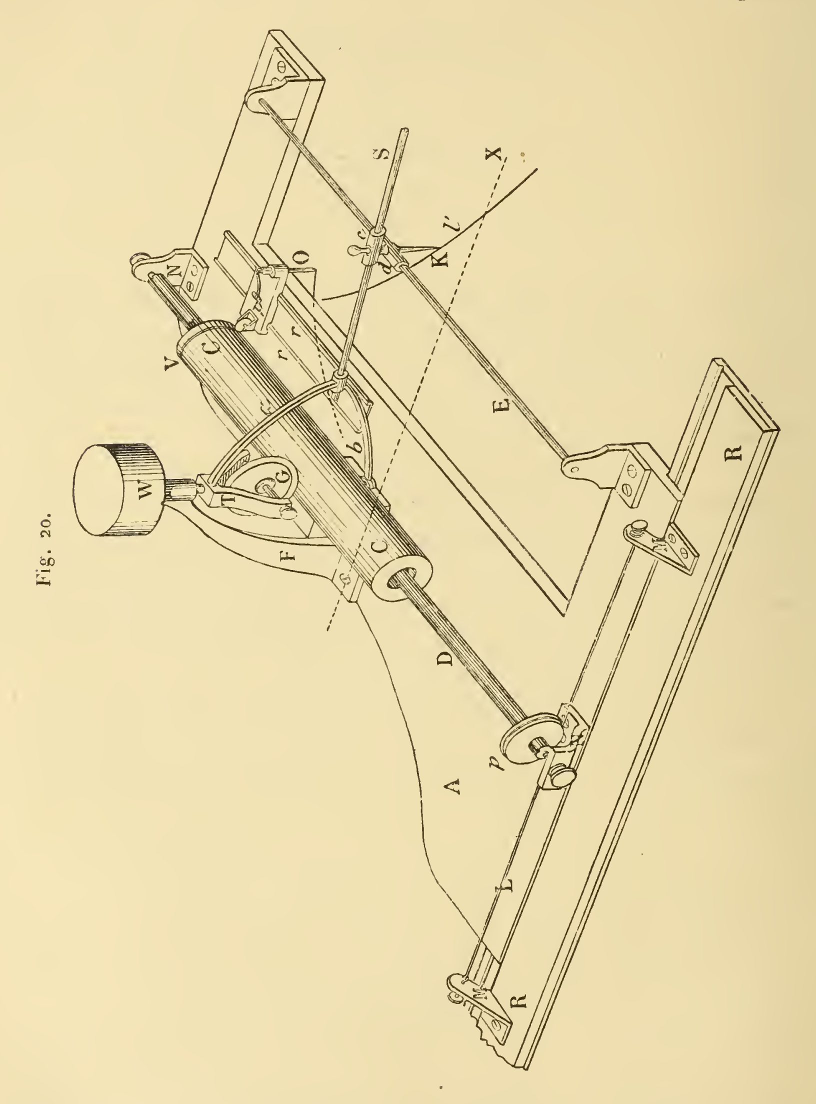


Fig. 20.

chette A le long de R se traduit par une rotation correspondante de la tige D.

Le cylindre CC peut se déplacer le long de la tige D, au moyen

de galets fixés sur C et roulant dans des rainures fraisées le long de la tige D, en sorte que toute rotation de la tige D entraîne une rotation égale du cylindre C, tout en permettant le déplacement longitudinal de ce dernier.

La roulette G appuye par l'action du poids W sur le cylindre CC; elle est maintenue par un étrier T, dont l'axe vertical peut tourner dans une douille faisant partie du support F. Le plan de la roulette peut donc être placé dans des azimuts quelconques, et la roulette elle-même tourner librement autour de son axe horizontal.

La tige S, qui joue ici le rôle *de la directrice,* est solidaire de l'étrier T et se trouve toujours dans le plan de la roulette.

Pour maintenir la base toujours constante, le mouvement de la tige S est guidé par deux manchons solidaires du stylet K, avec lequel on suit la courbe donnée. L'un de ces manchons *c* glisse librement le long de S, tandis que l'autre *d* glisse le long de la tige E, parallèle à l'axe du cylindre; ces deux manchons sont reliés par un tourillon qui leur permet de prendre une position relative quelconque.

Le mouvement longitudinal du cylindre C est transmis au chariot P par l'intermédiaire d'un galet pénétrant dans une rainure circulaire V pratiquée à l'extrémité du cylindre.

Le chariot P peut se déplacer longitudinalement sur les rails *rr;* il porte le crayon O qui va tracer sur le papier la courbe intégrale.

Pour tracer la courbe intégrale de la courbe donnée $y = f(x)$, on fixera la planchette R parallèlement à l'axe des x, de sorte que ce dernier coupe le prolongement de l'axe vertical de la roulette.

D'une main on fera glisser la planchette A le long de R, tandis que de l'autre on maintiendra le stylet K sur la courbe donnée. Le crayon O trace alors la courbe intégrale.

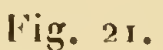
Il faut remarquer que, dans ce modèle, la courbe intégrale tout entière est déplacée sur la gauche d'une quantité égale à la distance horizontale du crayon O à la tige E.

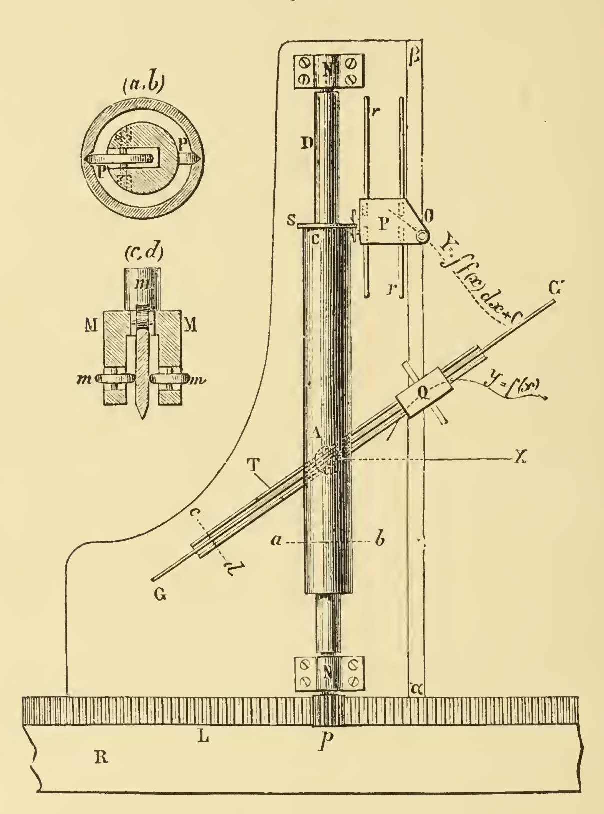
La base par laquelle il faut multiplier les ordonnées pour avoir les aires correspondantes de la courbe donnée est égale à la distance horizontale de la tige E à l'axe du cylindre CC.

Il n'est pas nécessaire de donner la théorie de cet appareil; c'est la réalisation directe du cas *a* de la *fig.* 14 au moyen du dispositif mécanique indiqué par la *fig.* 15.

Dans le couple cinématique : *vis* et *écrou*, le cylindre joue le rôle de la vis et la roulette celui de l'écrou.

Nous avons déjà vu qu'on pourrait obtenir la courbe intégrale, tracée sur le cylindre, au moyen d'un crayon solidaire de la plan-


Fig. 21.



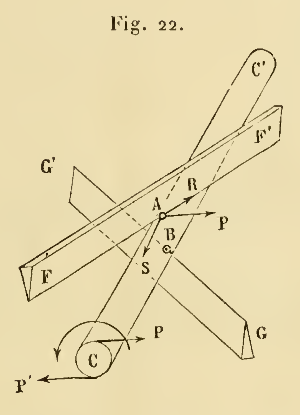
chette A et appuyé sur la surface du cylindre dans un endroit initial quelconque. On pourrait ainsi supprimer le chariot P; mais cette disposition aurait l'inconvénient de ne pas donner la courbe intégrale sur la même feuille que la courbe donnée.

Le modèle indiqué par la *fig.* 21, ne diffère de celui que nous venons de décrire que par l'emploi d'une règle droite GG' mobile dans un fourreau T à la place de la roulette. C'est l'application du dispositif indiqué par la *fig.* 17.

En outre, le fil et la poulie à gorge sont remplacés par la combinaison d'un pignon et d'une crémaillère.

L'auteur a cherché à rendre le fonctionnement de ces appareils plus sûr en employant deux roulettes ou deux règles, placées symétriquement par rapport à l'axe du cylindre (*fig.* 22); mais les

Fig. 22.



avantages ne contrebalancent pas la complication que cette disposition entraîne.

11. *Intégrateurs et intégraphes à roulette mobile le long d'une génératrice du cylindre.* — Les appareils que nous allons décrire sont basés sur l'emploi des dispositifs indiqués par les *fig.* 10 et 16.

La réalisation pratique de ces appareils a donné lieu à un certain nombre de modèles de planimètres linéaires très satisfaisants.

La *fig.* 23 représente un de ces appareils [1]. Sur une règle DD qui se place sur le plan du dessin parallèlement à l'axe des x, sont fixés les paliers S, S' qui portent entre des pointes le cylindre C.

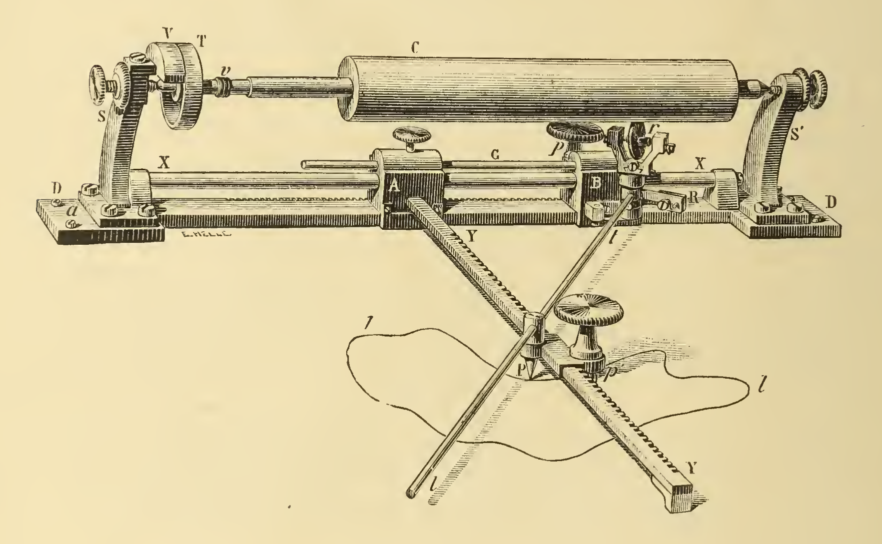
La roulette r est montée sur un chariot B mobile le long de la tige XX; l'orientation de son plan est déterminée par la position de la tige ll. Un autre chariot A porte une règle YY, perpendiculaire à XX. Les deux chariots sont rendus solidaires au moyen de la tige G, et leur distance peut être changée à volonté. Les deux règles D et Y forment crémaillères engrenant avec les pignons p

---

[1] *Comptes rendus*, 1882.

et p'. En tournant le pignon p, les deux chariots A et B avancent le long de DD, et la roulette, pressée par un ressort contre la surface du cylindre, se déplace le long d'une génératrice, ce qui entraîne un roulement mutuel des deux surfaces l'une sur l'autre. Le cylindre tournera avec une vitesse proportionnelle à la tangente de l'angle formé par ll et XX. On lit le nombre de tours sur un compteur placé sur la vis sans fin v (ce compteur n'est pas repré-

Fig. 23.



senté sur la figure) et les fractions sur le tambour T, muni d'un vernier V.

En faisant tourner le pignon p', on fait mouvoir la pointe P le long de YY. La tige l peut coulisser librement à travers une douille faisant partie de la pointe P.

Or, si l'on fait tourner p', on fait varier l'inclinaison de la tige l, ainsi que celle de la roulette r.

En faisant tourner les deux pignons en même temps, on imprime au triangle ABP une translation, tout en faisant varier sa hauteur AP. L'appareil est muni des vis de réglage nécessaires pour mettre toutes les parties dans leur position exacte.

Pour trouver l'aire d'une courbe, on la suit avec la pointe P, en faisant tourner le pignon p d'une main et p' de l'autre. On obtient

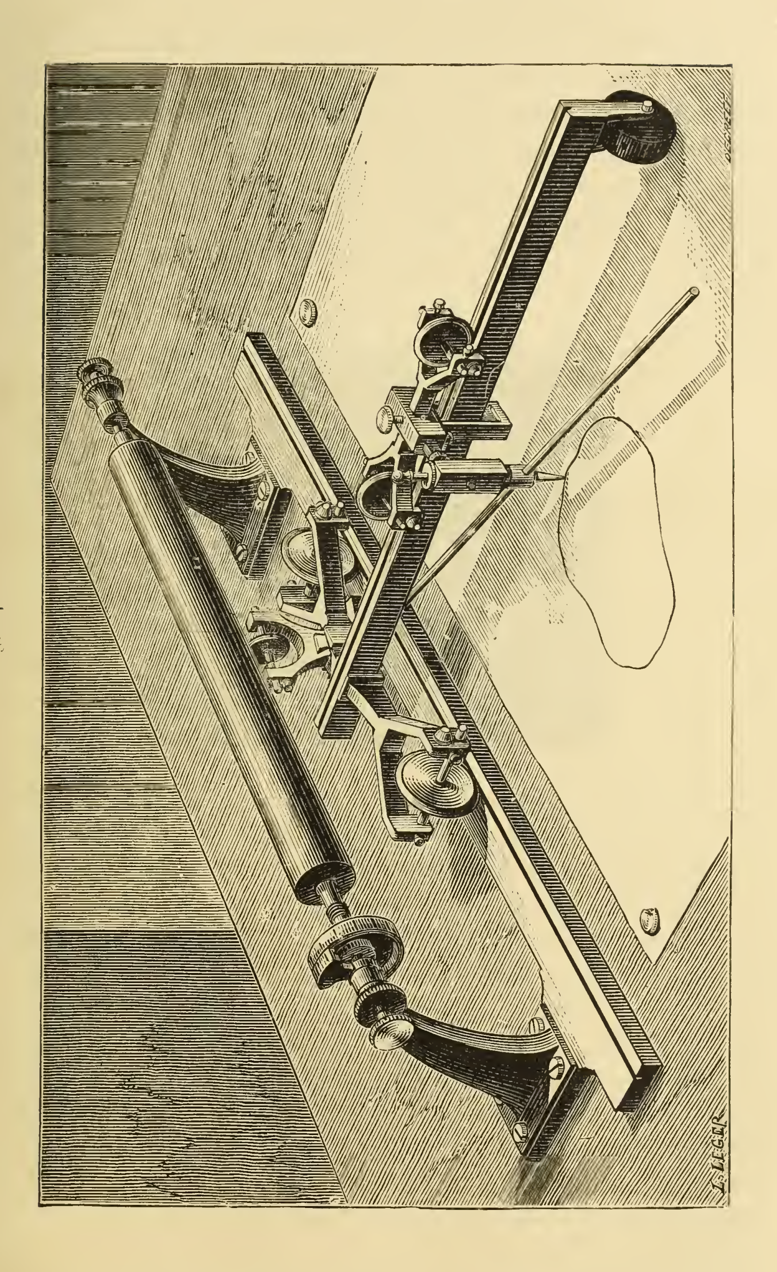
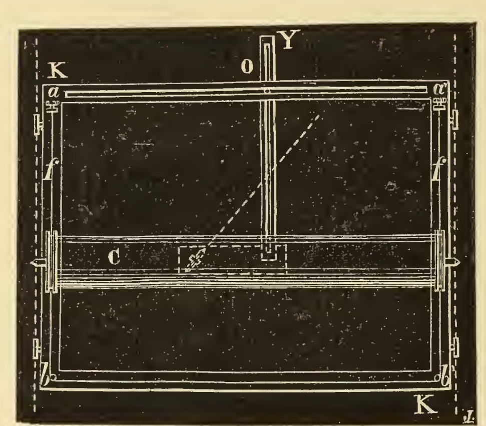


Fig. 24.

la surface en multipliant le nombre de tours du cylindre par une constante, proportionnelle à la distance entre A et B. Il faut une certaine habitude pour pouvoir facilement conduire la pointe P sur la périphérie de la courbe en manœuvrant simultanément les deux pignons. Mais en opérant lentement on arrive à la suivre d'une manière très exacte et cette disposition a l'avantage que l'inertie des pièces mobiles n'entre pas en jeu.

La *fig.* 24 représente un autre modèle dans lequel les chariots

Fig. 25.



sont montés sur des galets et l'on peut suivre la courbe directement avec la pointe qui est ainsi facilement mobile dans tous les sens.

Il est facile de voir que la trace laissée par la roulette sur la surface du cylindre est une *courbe intégrale,* dont les ordonnées doivent être mesurées en arcs de cercle sur cette surface et les abscisses dans le sens des génératrices.

On peut donc transformer ces appareils en *intégraphes* en donnant au cylindre des proportions convenables pour qu'on puisse enrouler une feuille de papier sur sa surface et en ajoutant un crayon porté par le chariot de la roulette et appuyant contre le cylindre.

Mais on aura toujours l'inconvénient d'avoir les deux courbes sur des feuilles séparées.

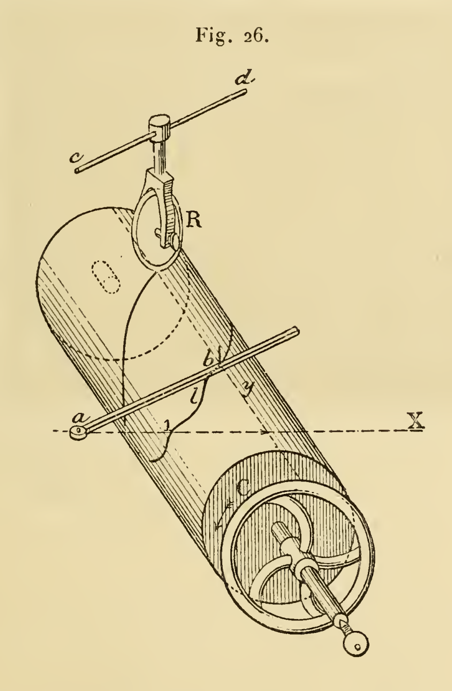
Pour parer à cet inconvénient, on peut transformer le mouvement de rotation du cylindre en un mouvement de translation d'un cadre

intermédiaire. J'étudie actuellement un intégraphe de ce genre représenté schématiquement par la *fig*. 25 ([1]).

Le mouvement du cylindre C est transmis au cadre K, mobile dans la direction des *y* au moyen des fils *f*, *f*, passant autour des poulies calées sur le cylindre, et tendus entre les points *ab* et *a'b'*. Le point d'intersection du cadre et de la règle Y, trace la courbe intégrale.

12. On peut encore employer un autre moyen pour obtenir les deux courbes sur la même surface, qui sera cette fois la surface

Fig. 26.



même du cylindre. Examinons le modèle d'intégraphe représenté par la *fig*. 20. Nous avons remarqué que la roulette trace sur la surface du cylindre la courbe intégrale, pendant qu'il se déplace le long de son axe D.

Si nous empêchions la translation du cylindre, et si nous donnions à la roulette la liberté de se déplacer le long de la généra-

([1]) A comparer avec le cas *e* du n° 8.

trice, tout en restant toujours parallèle à la directrice S, le même résultat serait obtenu. Il faudrait seulement ajouter un mécanisme qui permettrait le mouvement libre de la roulette dans la direction des y, et qui assurerait le parallélisme. On réaliserait ainsi le dispositif indiqué par la *fig.* 16.

La figure schématique 26 indique ce moyen de construire la courbe intégrale (¹).

Soit C un cylindre disposé de manière à pouvoir tourner librement autour de son axe. R une roulette pouvant se déplacer le long d'une génératrice du cylindre, et l une courbe donnée $y = f(x)$, tracée sur ce cylindre; si l'on suit cette courbe avec la pointe passant par b, en tournant le cylindre, et en maintenant à chaque instant le gouvernail cd de la roulette R (placé dans son plan de rotation) parallèle aux directrices ab, la roulette laissera sur la surface du cylindre une trace représentant la courbe intégrale.

Nous voyons donc qu'il faut introduire dans ce genre d'intégraphes un mécanisme spécial (²), réunissant la directrice et la roulette, de sorte qu'elles restent toujours parallèles quelles que soient leur position et leur direction commune.

Le problème se pose donc ainsi : une droite ab (*fig.* 27) étant parallèle à cd, il faut que la droite cd soit toujours assujettie à rester parallèle à ab, malgré un changement quelconque de position et de direction. Ainsi, quand on déplace ab en $a'b'$, il faut que cd soit réuni avec ab par un mécanisme tel, que cd puisse se placer en $c'd'$, parallèlement à $a'b'$, ou dans un autre endroit quelconque.

Un des mécanismes les plus simples est celui représenté par la *fig.* 28. Nous l'avons appliqué au modèle décrit dans le nº 14. La directrice est solidaire de la roue dentée a, qui engrène avec la roue b calée sur l'arbre T. Un manchon M, pouvant glisser librement le long de la tige T, tout en restant assujetti à tourner avec elle, porte la roue b' engrenant avec a'. Il est évident que si, dans une position quelconque, nous choisissons sur la roue a un dia-

---

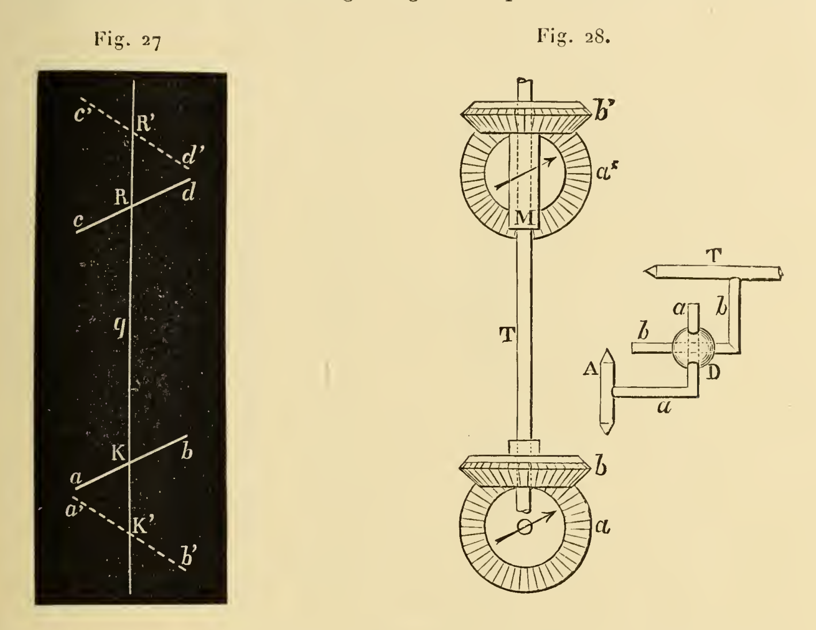
(¹) C'est l'application du cas b de la *fig.* 14.

(²) C'est M. Boys qui a le premier introduit l'emploi dans les intégrateurs d'un mécanisme de ce genre.

mètre, et que sur la roue a' nous prenions un diamètre parallèle, ces deux diamètres auront toujours la même direction malgré le changement de la distance entre a et a' et quelle que soit leur direction commune. En commandant a par la directrice de l'intégraphe et plaçant sur l'axe de a' la roulette de l'intégrateur, on obtiendra un dispositif réalisant le parallélisme cherché.

Au lieu de se servir d'engrenages, on pourrait intercaler entre

Fig. 27 Fig. 28.



a et b un autre mécanisme quelconque, pourvu que l'on applique le même mécanisme entre a' et b'. Il faut seulement que la transformation du mouvement de a en b soit inverse de celle de a' en b'. Ainsi nous pouvons remplacer les engrenages par un mécanisme indiqué sur la *fig.* 28, à droite. La rotation de l'axe A est transmise à l'arbre T par l'intermédiaire de deux tiges a et b, courbées à angle droit et glissant dans des trous pratiqués dans un solide D.

Il est évident que dans ce dispositif l'angle de rotation est limité.

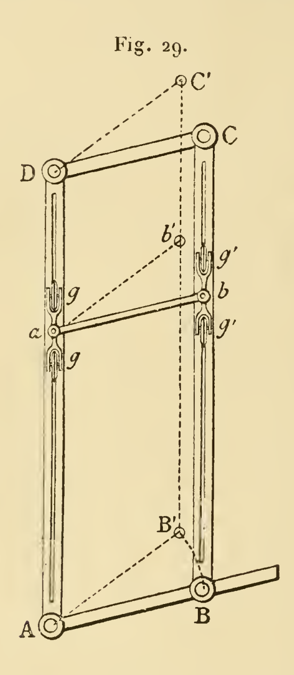
J'ai imaginé un autre dispositif qui est représenté par la *fig.* 29. Il consiste en un parallélogramme articulé ABCD formé de quatre bielles, dont l'une AD est fixe.

Les deux bras AD et BC portent des rainures servant de guides à un chariot monté sur quatre galets g, g'.

La traverse ab, qui réunit les deux moitiés de chariot, est articulée aux points a et b.

Si l'on incline la bielle AB, la distance horizontale entre AD et BC varie, le chariot se déforme et prend une position telle que ab

Fig. 29.



reste toujours parallèle à AB. Malgré ces changements de direction, le chariot peut se déplacer tout le long du parallélogramme, à une distance quelconque de AB.

M. Napoli a combiné un intégraphe dans lequel un mécanisme de ce genre est appliqué d'une façon très ingénieuse. Il s'est servi de l'intégrateur à cylindre et roulette indiqué schématiquement par la *fig.* 26. Cet appareil a été combiné spécialement dans le but d'obtenir des tracés continus sur une bande de papier se déroulant sur un cylindre C, par l'entraînement des rouleaux gg' (*fig.* 30).

Comme on le voit par la figure, le cylindre C est mobile autour de son axe, et l'on peut lui imprimer un mouvement continu de

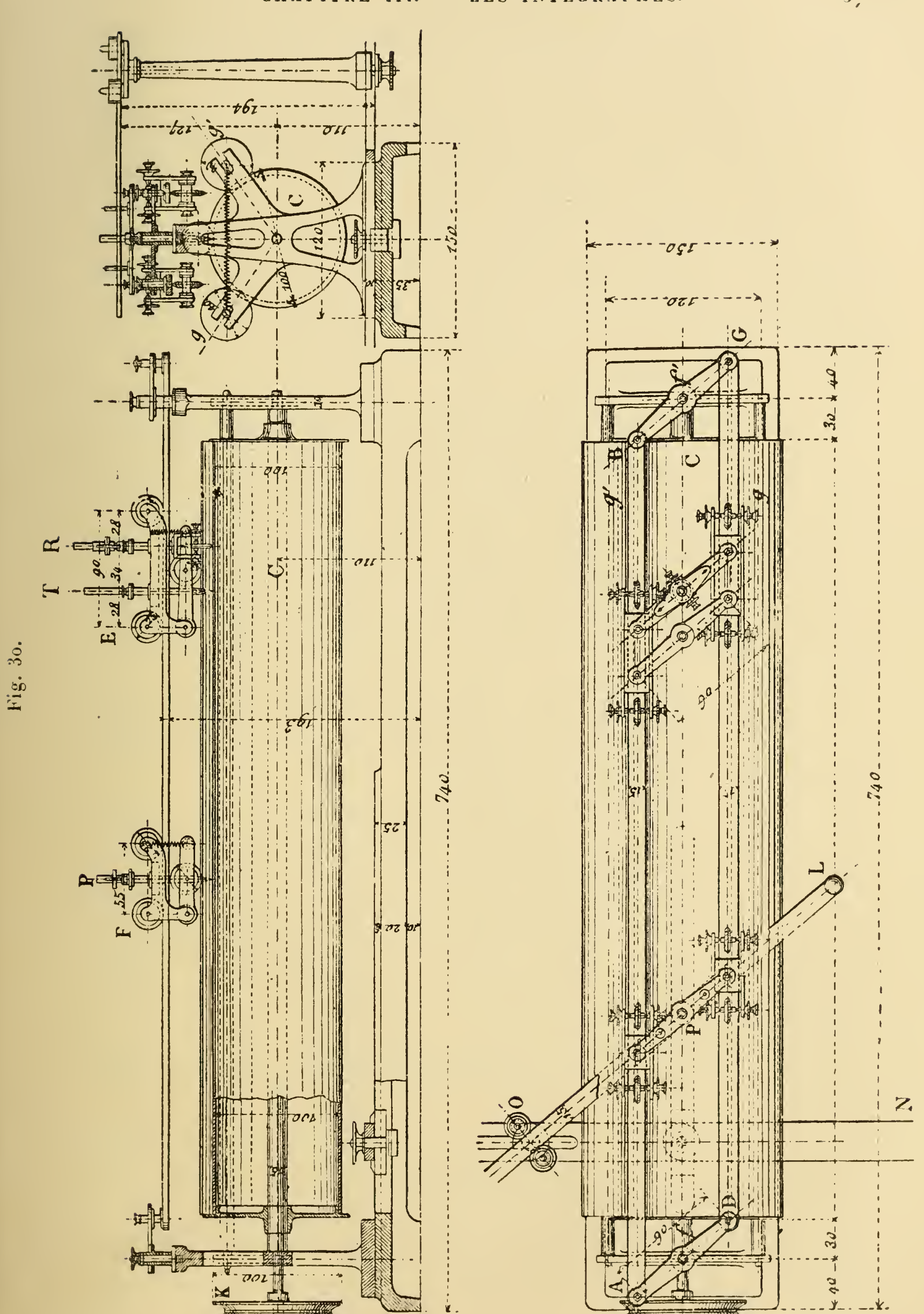


Fig. 30.

rotation au moyen de la poulie K; la bande de papier, pressée contre C par les deux rouleaux gg', est ainsi entraînée sous le chariot E et la pointe P.

Le parallélogramme déformable ABGD est mobile autour des deux tourillons ff appartenant à la ligne médiane (au lieu d'avoir un côté fixe, comme dans le schéma *fig.* 29).

La roulette est montée sur un chariot E, de sorte que son plan s'oriente en ayant toujours la même inclinaison que la traverse du chariot, le tireligne traceur est porté pas une seconde traverse, parallèle à la première; le trait sera donc à chaque instant parallèle au plan de la roulette.

Les déformations successives du parallélogramme, et par suite les inclinaisons correspondantes du plan de la roulette, sont produites par les déplacements du levier OL, coulissant entre deux galets, dont la position détermine l'axe des x. OL est fixé rigidement à la traverse d'un second chariot F qui porte la pointe P.

S'il s'agit de tracer la courbe intégrale d'une courbe donnée sur le papier, on fera tourner à la main la poulie du cylindre, et avec la pointe P on suivra la courbe, l'axe des x étant déterminé par la traverse ON.

Le levier OL prendra donc à chaque instant la direction des directrices, direction transmise au pl m de la roulette par le parallélogramme et la traverse du chariot.

Si, au contraire, et c'est la destination spéciale de l'instrument, il s'agit d'enregistrer un phénomène quelconque fonction de deux variables, il suffira que le déplacement du point L, dans le sens de l'axe du cylindre, soit proportionnel à l'une des variables (pression, intensité de courants, etc.,) tandis que la rotation du cylindre, uniforme s'il s'agit du temps, sera proportionnelle à la seconde variable dans le cas général.

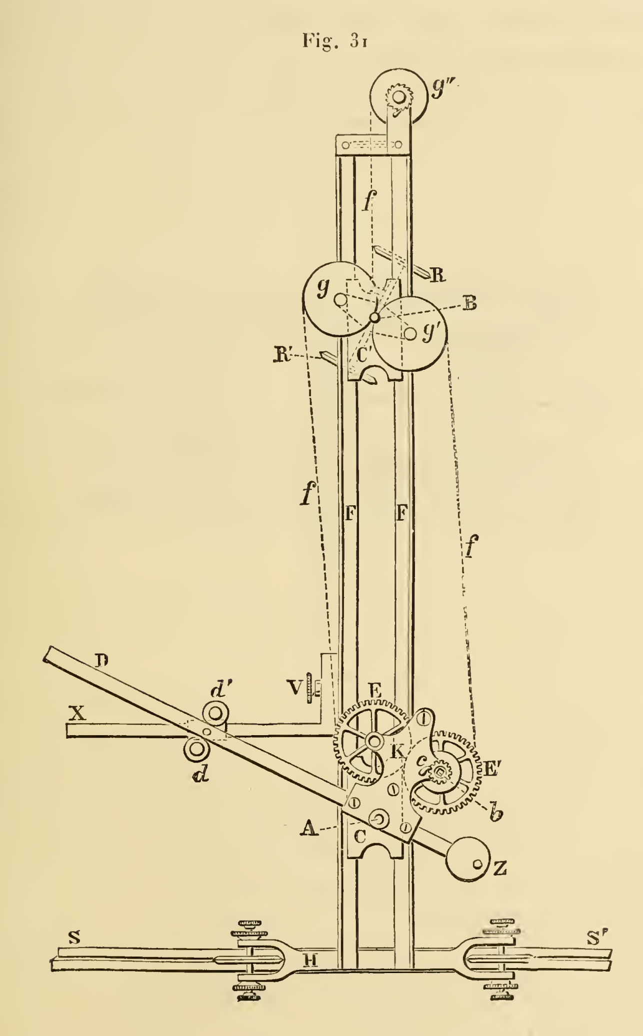
Il est facile de voir, en se rapportant à la *fig.* 26, qu'on peut substituer au cylindre C un plan tangent qui se déplacerait dans la direction des x.

On pourrait aussi rendre le plan immobile et déplacer tout le système comprenant la directrice, la pointe b et la roulette.

13. *Nouveau modèle d'intégraphe, système Napoli et Abdank-Abakanowicz.* — Les principaux dispositifs de ce modèle sont

dus en grande partie à M. Napoli. En 1883, j'ai exposé plusieurs de mes instruments à l'Exposition internationale d'Électricité, à Vienne, et c'est à cette occasion que j'ai proposé à M. Napoli,

Fig. 31

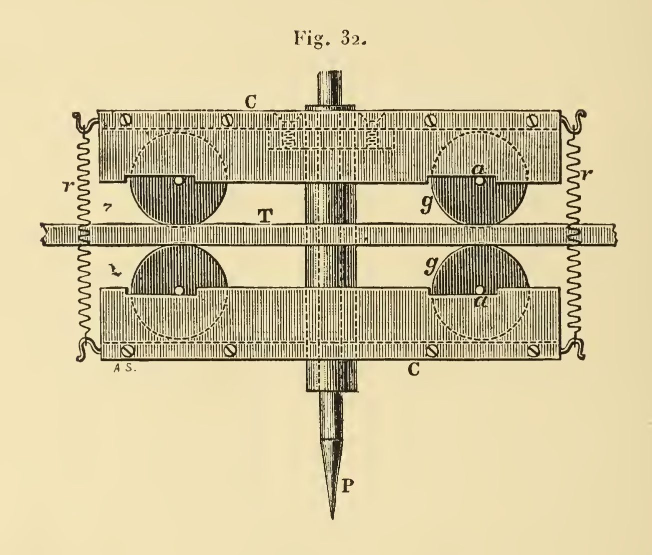


dont je connaissais la grande habileté (habileté dont témoigne toute une série d'appareils, dont quelques-uns figuraient à l'Exposition) la collaboration pour le développement de mon système. Cette offre a été acceptée, mais nos occupations professionnelles ont retardé l'exécution de ce projet jusqu'en 1885.

La *fig.* 31 ([1]) représente le plan du nouveau modèle, qui se rapproche beaucoup de celui qui a été imaginé par M. Boys (*fig.* 41).

Le principe cinématique est le même que j'ai appliqué dans tous mes intégrateurs. Dans cet appareil spécial, on retrouvera l'application du cas *d* de la *fig.* 14, en admettant que le rayon du cylindre est devenu infiniment grand. On comprendra facile-

Fig. 32.



ment son fonctionnement en se rapportant à la *fig.* 19; supposons, en effet, que la vis V soit desserrée, et que le chariot B ait la liberté de se mouvoir le long des rails D; la roulette décrira alors sur la surface du plan immobile C une courbe intégrale, si son plan de rotation est convenablement orienté à chaque instant.

La *fig.* 31 reproduit exactement ce dispositif, avec l'addition de la règle directrice D et du mécanisme qui assure le parallélisme du plan de la roulette et de la règle directrice, quelle que soit leur position relative.

La règle SS′ se fixe sur le plan du dessin, dans la direction de l'axe des x. Le chariot H, monté sur deux galets, porte le

([1]) *Comptes rendus;* septembre 1885.

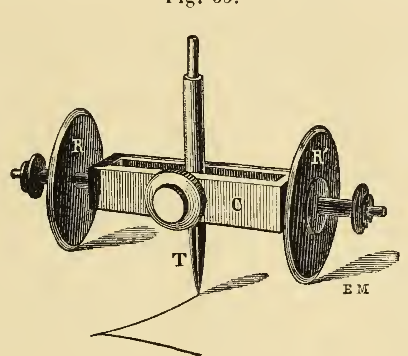
châssis FF, perpendiculaire à SS'. Ce châssis est formé de deux règles en cuivre, dont la section a la forme d'un T, pour obtenir le maximum de rigidité.

Les deux points A et B, dont l'un doit suivre la courbe donnée, et l'autre, tracer la courbe intégrale, se trouvent au centre de deux chariots C, C' mobiles le long du châssis FF.

Pour éviter, autant que possible, les frottements et toute possibilité de jeu, M. Napoli a monté ces deux chariots sur des axes roulants, comme cela est indiqué sur la *fig*. 32.

T représente la paroi intérieure du cuivre en T, sur laquelle se

Fig. 33.



promènent les galets, dont les axes, *a*, roulent sur le fond des échancrures pratiquées dans le châssis du chariot. Les deux parties de ce chariot sont rendues solidaires par de forts ressorts en spirale *r*, *r*.

Au centre du chariot C' est monté l'organe intégrateur. Au lieu d'appliquer une seule roulette, M. Napoli en a pris *deux*, équidistantes du point central B, qui doit tracer la courbe intégrale. Les détails de cet organe sont indiqués sur la *fig*. 33.

Les deux roulettes donnent lieu à une adhérence plus forte avec le papier, et elles permettent en outre de placer entre elles le tire-ligne T, destiné à tracer la courbe intégrale.

Il est évident que le changement de direction des plans des roulettes peut s'opérer sans glissement.

Cette disposition a l'avantage que, le tire-ligne étant une fois placé dans la douille qui le maintient, sa fente est toujours dans la

direction de la courbe qu'il trace, ce qui permet d'obtenir un trait fin et net dont l'origine et l'élément final sont bien déterminés.

Au centre du chariot C (*fig.* 31), se trouve une pointe A avec laquelle on suit la courbe donnée, et autour d'un axe vertical passant par ce point pivote une règle D, qui peut tourner autour d'un point déterminé par les galets d, d', tout en ayant la liberté de glisser. Cette règle représente *les directrices.*

La règle X, que l'on peut déplacer à volonté, détermine l'*axe des x.*

Le mécanisme que M. Napoli a employé pour obtenir le parallélisme entre les roulettes et la règle D est d'une très grande simplicité.

Sur le chariot C′ se trouvent deux roues à gorge fixes g, g' solidaires de l'axe qui est entraîné par les roulettes R, R′. Deux fils f, f sont fixés sur les galets. On voit immédiatement qu'en tirant sur ces fils on fait varier à volonté la direction des roulettes. Ces fils sont enroulés sur deux treuils formant corps avec deux roues d'engrenage E, E′, de même diamètre, placées de telle sorte que leur ligne des centres soit parallèle à la règle D. Un ressort à barillet b, situé au centre de la roue E′, maintient les fils f, f tendus, le tranchant des roulettes R, R′ empêchant le second chariot C′ de se déplacer le long du châssis F. Mais pendant la marche de l'appareil, les deux chariots peuvent s'éloigner ou se rapprocher, et les lignes des centres des roues g, g' et E, E′ resteront toujours parallèles, les treuils des roues dentées ne laissant échapper qu'une même quantité sur les deux brins, par suite de l'engrènement des deux roues E et E′.

En somme, dans ce modèle d'intégraphe, les deux points A et B sont forcés, par les chariots C, C′, de se trouver toujours sur la même verticale, et le changement de direction de l'équipage RR′ s'opère à distance, par l'intermédiaire de deux guides f, f, flexibles et toujours tendus. Pour contrebalancer la tension des fils ff, le chariot C est encore soumis à l'action du fil f', enroulé sur le tambour g'', muni d'un ressort à barillet.

Le reste de la *fig.* 31 s'explique de lui-même. De tous les appareils décrits jusqu'ici, c'est ce dernier qui a donné les meilleurs résultats, au point de vue de la netteté et de l'exactitude du tracé.

La *fig.* 34 donne la vue générale de ce modèle d'intégraphe.

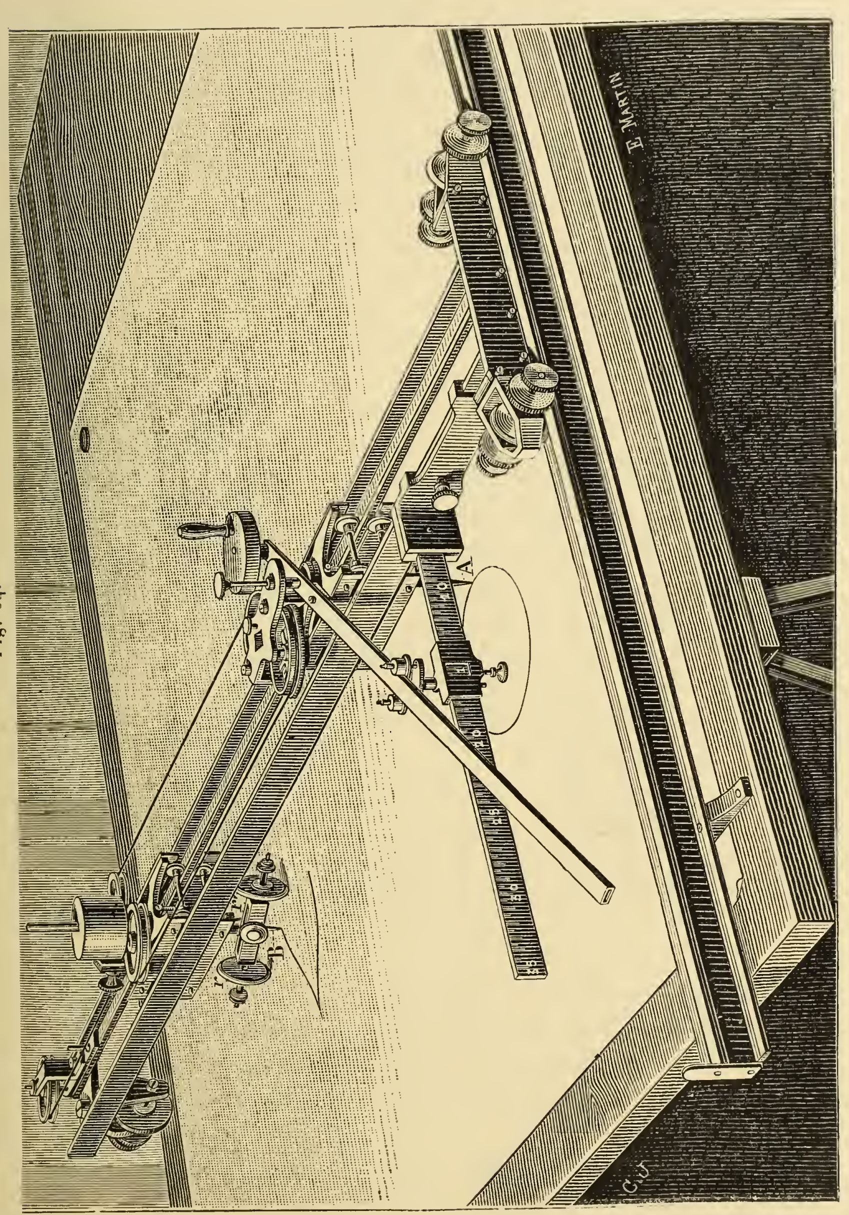
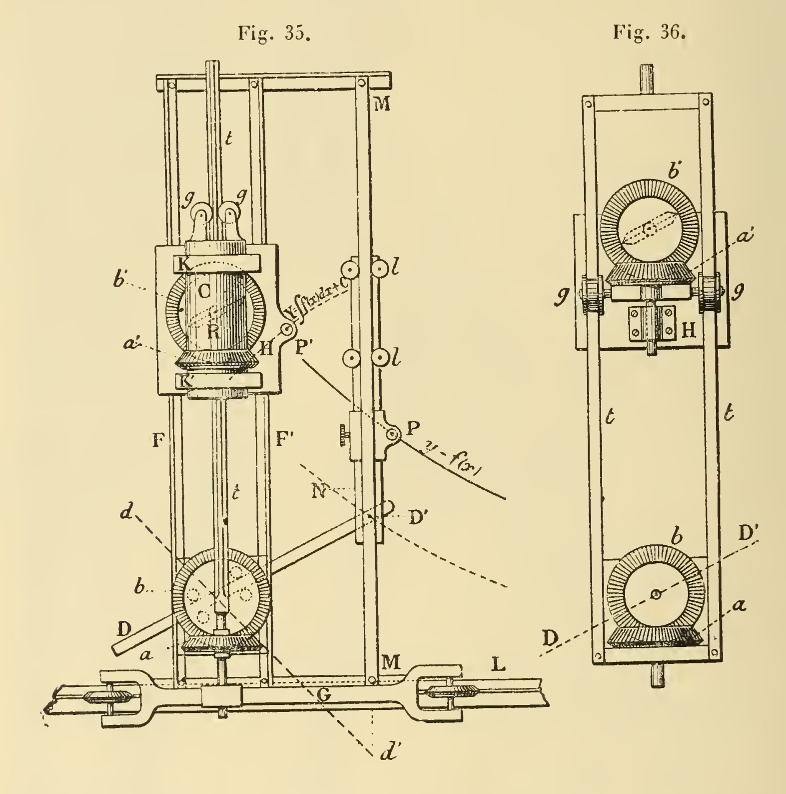


Fig. 34.

14. *Intégraphe à roues d'angle, système Abdank-Abakanowicz et Napoli.* — Dans un nouveau modèle d'intégraphe, le parallélisme entre la directrice et la roulette est maintenu à chaque instant par un double jeu de roues d'angle, dispositif indiqué déjà dans la *fig.* 28.

La *fig.* 35 représente la disposition générale de l'appareil. Comme

Fig. 35. Fig. 36.



on le voit, la directrice DD' est solidaire de la roue dentée b; les mouvements angulaires de celle-ci sont reproduits par la roue b', au moyen de la deuxième roue a, calée sur la tige t; les rotations de cette tige étant transmises au cylindre creux C, au moyen de quatre galets gg.

Le cylindre C est mobile dans deux paliers K, K' faisant partie du chariot H, et il porte une roue d'angle a' qui transmet à la roue b' les mouvements de b. L'axe de l'étrier de la roulette étant solidaire de la roue b', la roulette aura en chaque instant la même

direction que la directrice, après un réglage initial; et cela tout en pouvant, par suite de son mouvement sur le papier, entraîner le chariot H tout le long des règles FF′ dans la direction de l'axe des y. Ce chariot est porté par huit galets permettant un mouvement très aisé.

D'après ce que nous venons de voir, il suit que, si le point D décrit la courbe donnée, tout en restant toujours sur la droite MM parallèle à l'axe des y, la roulette tracera la courbe intégrale, lorsqu'on fera mouvoir le chariot G le long de la règle L parallèle à l'axe des x.

La directrice DD′ coulisse entre des galets, de manière à passer toujours par le centre de la roue b; en réalité ce n'est pas le point D′ qui suit la courbe donnée, mais bien une pointe P assujettie, au moyen de la tige N et des galets ll, à se déplacer le long de la règle MM, la tige N étant articulée en D′ avec la directrice DD′.

L'axe des x, au lieu de passer par le centre de la roue b, est alors déplacé d'une hauteur égale à PD′; hauteur que l'on peut faire varier au moyen d'une glissière à frottement dur.

Le tire-ligne qui trace la courbe intégrale est fixé au point P′ solidaire du chariot H, et il est orienté par un petit parallélogramme articulé qui maintient la fente parallèle à la roulette.

Ce dispositif a l'avantage de mettre le tire-ligne à découvert, en le plaçant ainsi en dehors du chariot, ce qui permet de suivre aisément tout le parcours du tracé et de choisir à volonté le point initial de la courbe intégrale.

La constante de l'appareil est donnée par la distance du centre de la roue b au point D′; on peut la faire varier en déplaçant la règle MM parallèlement à elle-même. Enfin il faut remarquer que les deux courbes sont déplacées, dans le sens des x, de la distance des points P et P′ dans cette direction.

Comme on le voit facilement, on peut décrire au moyen de ce nouveau modèle des courbes dont les ordonnées peuvent atteindre presque toute la hauteur du châssis. La courbe donnée et la courbe intégrale peuvent se superposer sans que le chariot qui porte la roulette gêne les mouvements.

Le chariot G est construit de telle sorte qu'il permet à la directrice de passer en dessous, de manière à prendre une position indiquée par la droite pointillée dd'.

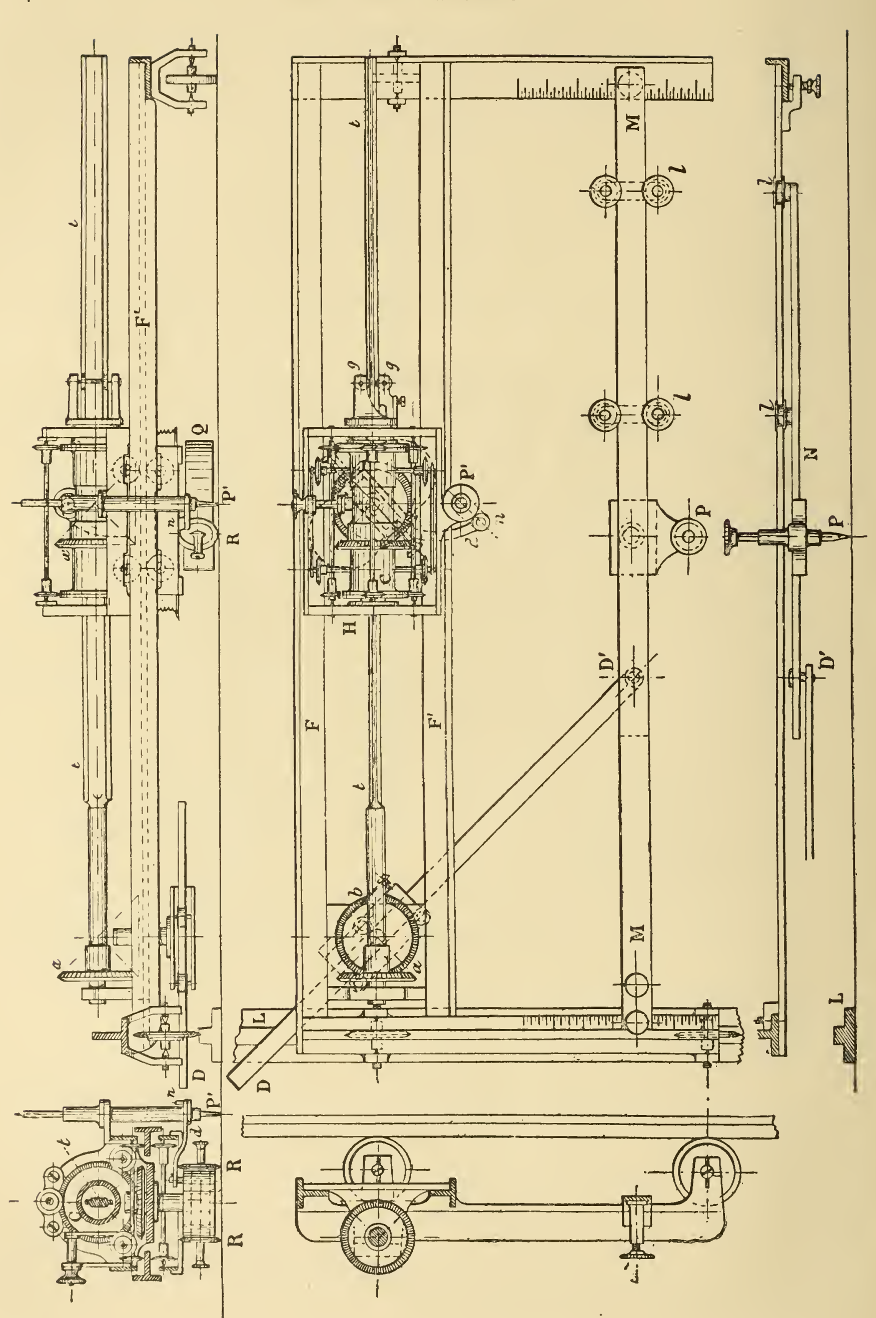


Fig. 37.

La *fig.* 37 montre les principaux détails de construction de ce modèle; comme on le voit, le cylindre creux C, au lieu d'être

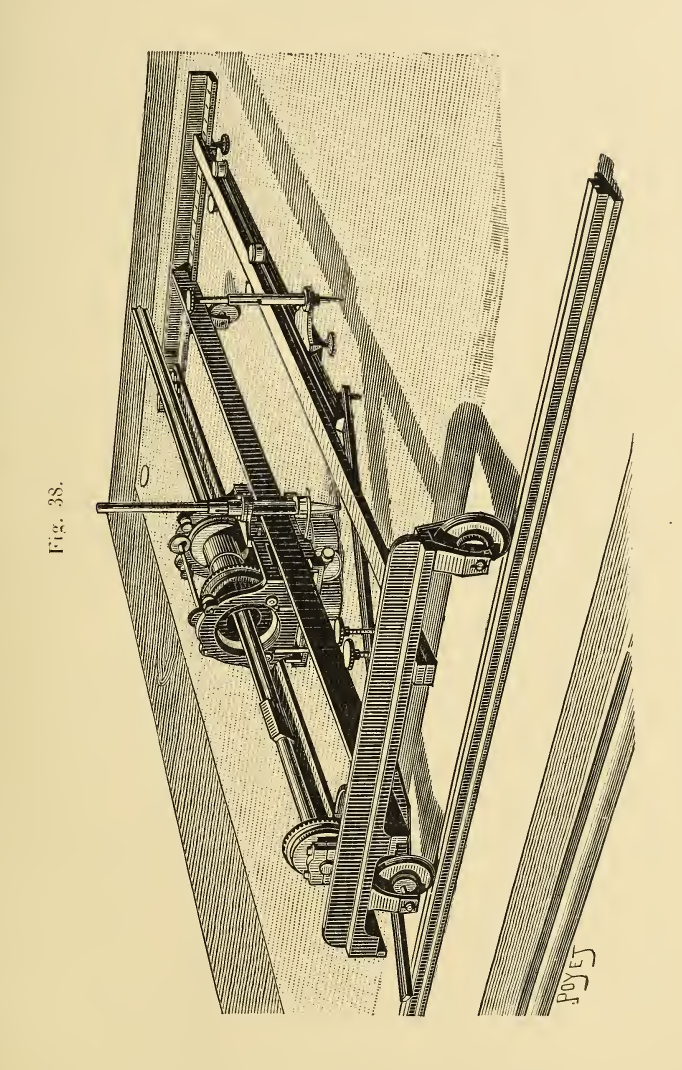


Fig. 38.

mobile dans des paliers, comme nous l'avons dit, est porté par six galets, réduisant les frottements au minimum; les roulettes sont appuyées sur le papier par le poids Q, leur chariot pouvant coulisser suivant la verticale.

Ce chariot mobile H est monté sur des axes roulant le long des

rainures pratiquées dans le bâti du chariot, comme c'est indiqué sur la *fig.* 32.

Le chariot des roulettes peut être relevé au-dessus du papier au moyen d'un bouton et d'un excentrique; ce dispositif permet de mouvoir librement à la main le chariot le long du bâti principal et de le placer ainsi que le tire-ligne à l'origine choisie.

Le tire-ligne est monté dans un canon placé latéralement; le parallélogramme articulé qui place la fente à chaque instant parallèlement au plan des roulettes, est constitué par une bielle d, articulée à une distance égale de l'axe de la roulette et du tire-ligne.

Pour changer la constante de l'appareil, on fait glisser la règle MM le long des divisions gravées sur les côtés latéraux du bâti principal.

Pour faire varier la position de l'axe des x, on déplace le chariot qui porte la pointe P le long de la règle inférieure N.

Ce modèle, construit par la maison P. Barbier et C[ie], a sur le précédent l'avantage d'assurer une précision encore plus grande, en supprimant complètement les brins de trasmission; son fonctionnement est aussi parfait qu'on peut le désirer et son réglage relativement aisé.

La *fig.* 38 montre l'aspect général de l'appareil.

Dans un modèle actuellement en construction, nous avons transformé cet appareil, en supprimant le cylindre creux C et en remplaçant la tige t par un cadre tt (*fig.* 36); la roue a est solidaire de ce cadre, et les mouvements de celui-ci sont transmis à la roue a', au moyen des galets gg, a' étant naturellement mobile sur des paliers faisant partie du chariot H, comme précédemment.

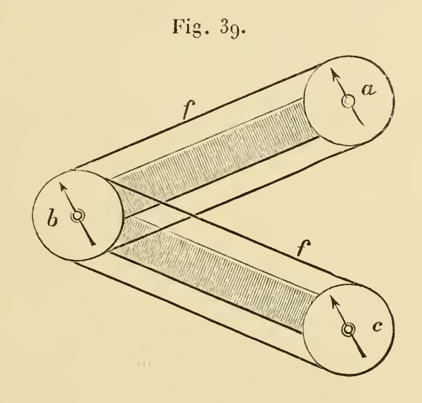
Cette modification permet de supprimer la pièce C, d'une construction assez compliquée, et de plus le mouvement de la roue a est transmis à a' par un bras de levier plus long, la distance des galets gg étant dans ce cas beaucoup plus grande que précédemment. Enfin, dans quelques appareils, au lieu de roues dentées, nous employons les roues d'angle avec transmission par ruban métallique inextensible.

Les nouveaux modèles d'intégraphes tracent la courbe intégrale avec une netteté irréprochable. Sous ce rapport, on peut comparer le tracé obtenu à celui de cercles construits au moyen d'un compas et d'un tire-ligne.

15. *Machine à intégrer de M. C.-V. Boys.* — En Angleterre, M. Boys a trouvé, indépendamment de moi et sans avoir connaissance de mes travaux antérieurs, le même principe cinématique pour l'intégration, et il a fait une série d'appareils remarquables par l'élégance et la simplicité des solutions des différentes difficultés mécaniques, que le problème que nous étudions présente à chaque instant.

Mais M. Boys, quoique ayant débuté par un intégraphe, ne s'est occupé des appareils destinés à tracer la courbe intégrale que d'une manière passagère, et c'est surtout vers les applications pra-

Fig. 39.

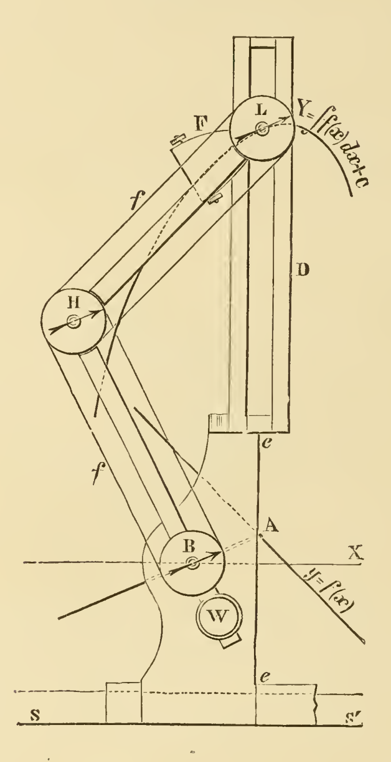


tiques des intégrateurs qu'il a dirigé ses recherches (voir chapitre V.) Il a construit de très remarquables indicateurs totalisateurs des machines à vapeur et des compteurs d'énergie électrique, dans lesquels le principe cinématique de la vis à pas variable est appliqué d'une manière très ingénieuse ([1]). C'est surtout le pre-

([1]) Nous avons eu avec M. Boys une discussion assez longue, mais toujours courtoise, au sujet de la priorité de nos inventions. A la suite de cette discussion M. Boys a reconnu loyalement et à plusieurs reprises que nous l'avions devancé; de notre côté nous tenons à reconnaître qu'il a beaucoup contribué au développement de ce principe et qu'il a trouvé des solutions que nous n'avions pas entrevues dès le début. Voici, du reste, la déclaration que M. Boys a faite au Congrès de l'Association britannique, à Southampton, 1882 (voir le *Rapport*) : « Je me sens obligé de mentionner que le professeur Abdank-Abakanowicz a déjà inventé un intégrateur basé sur les mêmes principes mathématiques; mais, à ma connaissance, cet appareil n'a pas eu d'applications pratiques. J'ai été accusé de plagiat, non par le professeur Abdank-Abakanowicz, mais par d'autres personnes; mais, comme je n'avais jamais entendu parler de cette invention avant d'avoir terminé mon appareil, ma bonne foi ne saurait être mise en doute. »

mier appareil de M. Boys, destiné à tracer la courbe intégrale, qui nous intéresse ici particulièrement. Il a été décrit dans le *Philosophical Magazine* (mai 1881). Cet appareil est la traduction méca-

Fig. 40.

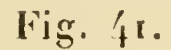


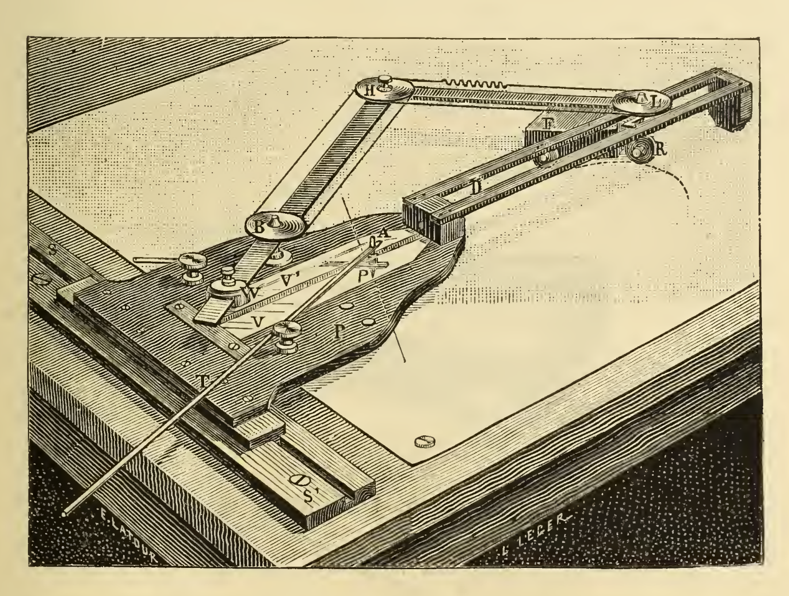
nique du dispositif indiqué par la *fig*. 7. M. Boys a le premier introduit dans un intégraphe un mécanisme destiné à assurer le parallélisme entre la directrice et la roulette.

Ce mécanisme consiste en un système de trois poulies (*fig*. 39), montées sur deux bras articulés sur l'axe de la poulie intermédiaire. Un fil *ff* enroulé sur les poulies assure la correspondance des mouvements angulaires des poulies extrêmes *a*, *c*. La roulette étant montée sur l'axe de la poulie *a*, si l'on donne à un diamètre de la poulie *c* les inclinaisons successives des directrices, le plan de la roulette sera orienté de la même manière.

La *fig*. 40 (empruntée au *Philosophical Magazine* indique la

solution proposée par M. Boys. Comme on le voit, la poulie B se déplace le long de l'axe des x et elle est solidaire de la tige AB qui prend à chaque instant la direction des directrices de la courbe donnée $y = f(x)$. (C'est une droite dans le cas de la *fig.* 40). La


Fig. 41.



roulette, montée sur l'axe de la poulie L, décrit sur le papier la courbe intégrale : $y = \int f(x)\,dx + C$ (qui est une parabole).

On manœuvre l'appareil exactement de la même manière que mon intégraphe (*fig.* 20, n° 10).

La *fig.* 41 donne la vue perspective de l'intégraphe Boys.

Pour obtenir la courbe, on met sous la roulette R un papier gras à calquer, qui laisse l'empreinte du passage de la roulette.

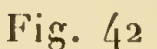
La planchette P, portant tout l'intégraphe, glisse le long de la règle SS'. En poussant ou en tirant sur la tige T, articulée sur l'axe A, qui porte la pointe p, on suit la courbe donnée. L'axe A peut glisser librement dans une rainure parallèle à l'axe des y, formée par deux plaques transparentes en verre, V, V', laissant bien voir la courbe $y = f(x)$, tracée sur le papier.

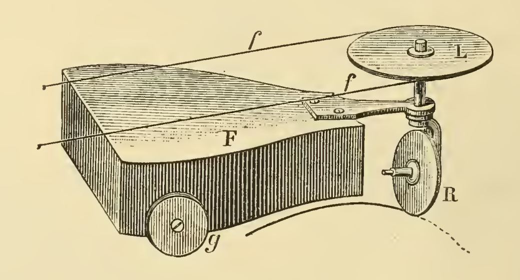
La roulette R est appuyée contre le plan du dessin, par un poids

F, monté sur deux galets (pour les détails, voir *fig.* 42). Ce poids suit la roulette R dans son mouvement, comme un tricycle qui va toujours dans la direction indiquée par sa première roue, servant de gouvernail.

L'axe de la poulie L (et par conséquent de la roulette R), ainsi que la pointe p, sont forcés par les guides en verre V, V′ d'un côté, et D de l'autre, de se trouver toujours sur la même ordonnée.

Quoique l'appareil soit construit d'une manière très primitive, et qu'on ne puisse le considérer que comme un modèle de démon-


Fig. 42



stration, les courbes tracées sont très nettes et la manœuvre de l'instrument assez aisée.

Cet appareil remplit, comme nous l'avons déjà dit, toutes les conditions de la *fig.* 7, et au point de vue cinématique, il est l'application du cas d de la *fig.* 14, si l'on suppose que le rayon du cylindre (formant vis à pas variable) est infiniment grand.

On s'expliquera mieux cette relation, quand on fera croître à l'infini le rayon du cylindre C, du modèle représenté par la *fig.* 16.

Du reste, voici comment M. Boys définit lui-même cette relation [1] :

« Supposons que le chariot F (*fig.* 41 et 42) soit incapable d'un mouvement vertical [2]; alors, par sa tendance à monter ou à descendre, il va pousser le papier dans la direction opposée.

Or, si l'on enroule le papier sur un cylindre dont l'axe se trouve au-dessous de la courbe décrite par la roulette de devant R, et si les galets de derrière sont supportés par un autre moyen

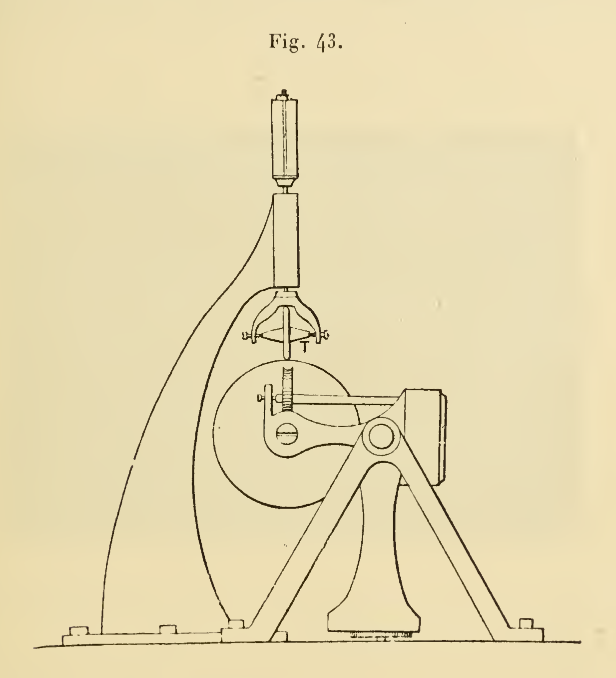
---

[1] *Philosophical Magazine*, 1882.

[2] A comparer avec les *fig.* 8 et 10.

quelconque, le cylindre va se mettre à tourner; sa rotation totale sera proportionnelle à l'ordonnée de la courbe donnée, et l'intégrale cherchée sera donnée par le nombre de tours. On verra immédiatement que le chariot et le mouvement assurant le parallélisme ne sont plus nécessaires, et que l'inclinaison de ce qui formait auparavant la roue de devant du chariot, et ce qui peut être appelé

Fig. 43.



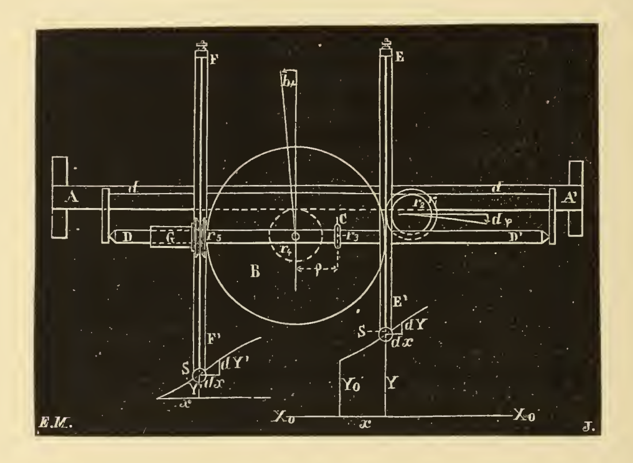
maintenant la roue tangentielle, peut être déterminée mécaniquement par la même méthode que celle adoptée pour donner l'inclinaison à la tige (directrice). Aussi, en faisant mouvoir le cylindre longitudinalement, sous la roue tangentielle, au lieu de la mouvoir le long de la surface du cylindre, et en inclinant son plan par des moyens convenables, la rotation du cylindre mesurera, comme auparavant, l'intégrale. »

Par ce raisonnement, M. Boys a transformé l'appareil de la *fig.* 41 en un autre (*fig.* 43) qui, tout en présentant un aspect extérieur différent, n'en est pas moins une simple transformation. L'intégrateur représenté sur la figure, formé d'un cylindre et d'une roulette T, fait partie d'un totalisateur d'énergie électrique.

Nous voyons qu'il est indentique au modèle que nous avons déjà décrit (*fig.* 15).

16. *Intégraphe de Zmurko.* — Cet appareil décrit en 1884 [1] est basé sur un principe cinématique d'intégration identique à celui appliqué dans les planimètre linéaire, genre Gonella, Oppikofer, Wettli-Starke, etc. (Voir la note du Chap. IV.) Il est intéressant

Fig. 44.



au point de vue de la transformation du mouvement. La *fig.* 44 donne le schéma de son dispositif.

Une règle lourde AA', forme la base de l'appareil. On voit au-dessus un plateau circulaire horizontal B, monté sur un axe vertical O. Sous ce plateau, et sur le même axe, est fixée une roue r_4, qui s'appuie contre la règle AA'. La tige EE', guidée entre deux paires de galets, porte à son extrémité la pointe s, dont on se sert pour suivre le contour de la courbe donnée. Cette tige porte un fil tendu, qui est enroulé autour de la poulie r_1, ce qui fait que la tige EE' se déplace dans la direction de l'axe des y, quand on fait tourner la poulie.

On trouve, de l'autre côté du plateau B, une autre tige semblable FF', dont le fil est enroulé sur une poulie verticale r_5.

---

(1) *Kosmos*, 1884. N° 5, p. 185, Skibinski, Lwow (Léopol).

Quand on tourne cette poulie, la tige FF′ se déplace dans le même sens que EE′.

L'extrémité inférieure de la tige FF′ porte un crayon S destiné à tracer la courbe intégrale.

La poulie r_2 montée sur le même axe que la poulie r_1 est rendue solidaire de la tige DD′, au moyen d'un fil *dd′* enroulé autour de cette poulie, et dont les bouts sont fixés dans les paliers portant la tige.

Quand cette poulie tourne, la tige DD′ se déplace longitudinalement. Cette tige DD′, parallèle à AA′, a son axe placé dans un plan vertical passant par l'axe vertical O. Elle passe sur des galets à l'intérieur du fourreau G, solidaire de la poulie r_5. Le fourreau G laisse passer la tige DD′, quand elle se déplace dans la direction de son axe, tout en gardant la même position. Mais le moindre mouvement de rotation de la tige est transmis à la poulie r_5 et par conséquent à la tige FF′ et au crayon S.

La roulette Cr_3, solidaire de la tige DD, est appuyée contre la surface du plateau B.

Toutes ces pièces sont montées sur un chariot commun, qui peut glisser sur deux galets, le long de la règle AA′. Le troisième point d'appui pour ce chariot est formé par la roue r_4, appuyée contre la règle AA′, par le poids de la partie antérieure de l'appareil, ce qui fait que cette roue tourne, quand le chariot se meut le long de la règle.

Or, si nous imprimons à la pointe *s* un mouvement, dans la direction des *y*, égal à dY, le fil de la tige EE′ va faire tourner la poulie r_1 d'un angle égal à *d* tel que

$$r_1 d\varphi = dY,$$

$$d\varphi = \frac{dY}{r_1}.$$

La poulie r_2 va tourner du même angle et imprimera à la tige DD′ un mouvement de translation dans la direction des x, ce qui aura pour effet d'augmenter la distance ρ, entre la roulette C et le point O, de la grandeur

(1) $$d\rho = r_2 d\varphi = \frac{r_2}{r_1} dY.$$

Ni la poulie r_5, ni le crayon S n'auront encore fait aucun mouvement.

Imprimons maintenant à la pointe s un mouvement dans la direction des x égal à dx. Le chariot entier va suivre la pointe dans ce mouvement, et la roue r_4, roulant sur la règle AA_1, développera sur sa circonférence un arc égal à dx. Si en même temps la roue r_4 a tourné d'un angle égal à $d\psi$, nous tirerons sa valeur de l'équation

$$d\psi = \frac{dx}{r_4}.$$

Le plateau B va tourner du même angle, et entraînera la roulette C, et son point de contact va parcourir un chemin

$$\rho\, d\psi = \rho \frac{dx}{r_4}.$$

Si la roulette C a tourné pendant ce mouvement de la quantité $d\varepsilon$, nous aurons

$$d\varepsilon\, r_3 = \rho \frac{dx}{r_4},$$

$$d\varepsilon = \frac{\rho\, dx}{r_3 r_4}.$$

La tige DD′ et la poulie r_5 ont alors tourné du même angle, et la poulie r_5 va développer de sa circonférence une longueur de fil

$$r_5\, d\varepsilon = \frac{r_5}{r_3 r_4} \rho\, dx.$$

Ce sera le déplacement du crayon S dans la direction des y. Désignons ce déplacement par dY' :

$$(2) \qquad dY' = \frac{r_5}{r_3 r_4} \rho\, dx.$$

Dans la direction des x, le crayon S a parcouru le chemin dx; or, quand la pointe s a décrit un élément de courbe donnée (dx, dY), le crayon S a tracé un élément d'une autre courbe (dx, dY').

En intégrant l'équation (1), nous obtenons

$$\rho = \frac{r_2}{r_1}(Y + C).$$

Nous avons vu que ρ ne dépend que de la position de la pointe s dans la direction de l'axe des y; admettons donc une telle position de l'axe des x et de la pointe s, que ρ soit égal à zéro, ce qui veut dire que la roulette C se trouvera au centre du plateau B. Dans cette position, la constante C s'élimine, parce que pour $\rho = 0$, $Y = 0$.

Portons alors la valeur $\rho = \frac{r_2}{r_1} Y$, dans l'équation (2) et nous obtiendrons

$$dY' = \frac{r_2 r_5}{r_1 r_3 r_4} Y\, dx$$

et, par intégration,

$$(3) \qquad Y' = \frac{r_2 r_5}{r_1 r_3 r_4} \int Y\, dx = \frac{1}{c} \int Y\, dx.$$

C'est l'équation de la courbe tracée par le crayon S. On voit bien que c'est une courbe intégrale par rapport à la courbe donnée $Y = f(x)$.

La constante de l'intégration s'élimine dans la formule (3), parce que nous admettons toujours certaines limites entre lesquelles on opère la sommation. La constante

$$c = \frac{r_1 r_3 r_4}{r_2 r_5}$$

ne dépend que des dimensions des poulies et des roulettes : c'est donc la constante de l'appareil lui-même.

17. *Intégrateur et dérivateur de M. Mestre.* — M. Mestre a déposé, en 1885, un brevet [1] concernant un appareil qui rentre

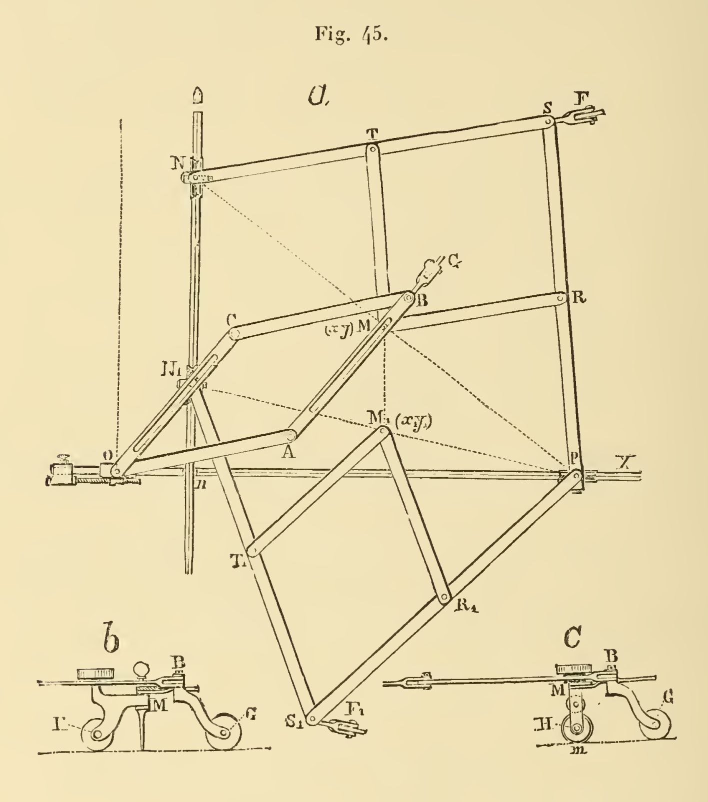
---

[1] Brevet français n° 167 670 déposé le 16 mars 1885. Voici les deux points principaux que M. Mestre revendique dans son brevet : 1° la combinaison d'un appareil caractérisé par l'emploi d'un parallélogramme articulé, mobile autour d'un de ses sommets, dont les deux côtés parallèles sont rendus solidaires de deux pantographes; 2° la combinaison des dispositifs b et c (*fig.* 45) ayant pour but d'assujettir la droite AB à passer toujours par le point M et à rester tangente à la courbe tracée par ce point.

dans la catégorie des intégraphes. Il est représenté par la *fig.* 45.

Le fonctionnement de cet appareil est facile à comprendre. Le point M_1 est destiné à suivre la courbe donnée, et le point M, où se trouve la roulette, doit tracer la courbe intégrale. Pour que ces points restent toujours sur la même verticale, ils sont guidés par

Fig. 45.



les points médians de deux pantographes N_1S_1P et PSN, qui sont réunis en P par un axe vertical monté sur un galet pouvant se déplacer le long du rail OX. Les points N et N_1 sont aussi montés sur des galets permettant le mouvement libre le long du rail nN, qui a la direction des y.

Un parallélogramme articulé OABC dont un des sommets pivote autour d'un point O (ayant une position déterminée sur l'axe des x), complète l'appareil. Les deux bielles OC et AB, forment coulisses, dans lesquelles peuvent glisser, d'un côté le pivot de

l'étrier du galet N_1, et de l'autre, le pivot de la pièce M, qui peut être construite comme l'indiquent les croquis *b* et *c*. La partie de l'appareil coulissant dans la bielle AB, peut être faite suivant ces deux indications, mais comme l'auteur du brevet trouve que le dispositif *b* est défectueux, nous ne considérerons que celui indiqué par la lettre *c*. Une roulette H, montée sur un étrier et munie d'un contrepoids pour assurer l'adhérence au papier, est tenue par une pièce qui coulisse dans la bielle AB, en sorte que la direction du plan de la roulette soit forcée de rester toujours la même que celle de AB, et par conséquent de OC, qui joue le rôle de la règle directrice des autres intégraphes décrits précédemment.

On verra facilement que, si l'on fait suivre la courbe avec la pointe se trouvant en M_1, le point N_1 prendra à chaque instant une position telle que $N_1 n$ sera toujours proportionnel à l'ordonnée correspondante de la courbe. La longueur On restant constante, ON_1 donnera la direction que doit suivre le point M pour tracer la courbe intégrale. Comme AB est toujours parallèle à OC, la roulette placée en M prendra la direction indiquée et se déplacera en traçant la courbe le long de la rainure pratiquée dans la bielle AB.

Comme ce modèle n'existe qu'à l'état de projet, il n'est pas possible d'avoir une opinion précise sur sa valeur. Je doute un peu de la possibilité d'exécution d'un appareil aussi compliqué, dans lequel les frottements et les coincements seraient évidemment très considérables. Il y a encore un autre désavantage, qui est évident : les courbes ne peuvent avoir que des dimensions très restreintes.

Le même inventeur a proposé une disposition simplifiée de l'appreil, qui est représentée par la *fig*. 46 (¹).

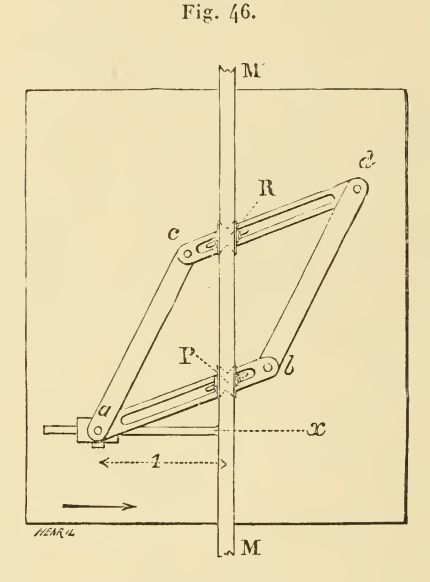
Dans cette disposition la pointe P (ou la roulette) qui doit suivre la courbe donnée, et la roulette R se trouvent toujours sur une même ordonnée, qui est représentée par MM′ et qui est immo-

(¹) C'est au sujet des instruments représentés par les *fig*. 45 et 46 et imaginés par M. Mestre en 1885, que leur inventeur a fait une réclamation de priorité. Il en est résulté une discussion d'un caractère personnel entre MM. Mestre et Napoli, à l'occasion de l'appareil représenté par la *fig*. 34. En comparant les appareils en cause, on pourra juger du fondé de cette réclamation. Du reste, je puis ajouter que j'ai été mis hors de cause dans cette discussion par les deux parties.

bile. C'est le plan du dessin qui est animé d'un mouvement de translation dans la direction des x. Les deux côtés opposés ab et cd du parallélogramme déformable $abcd$, sont munis de coulisses et la roulette R, ainsi que la pointe P, sont portées par des coulisseaux marchant à frottement doux dans ces coulisses. La constante est représentée par la distance du point a à la droite MM'. La bielle ab joue le rôle de la directrice.

Il est facile de se rendre compte des difficultés qui s'opposeront

Fig. 46.



au bon fonctionnement de cet intégraphe, quand on essaiera de le construire, quand on suppose que la courbe donnée, que l'on suit avec la pointe P, présente un élément vertical. Alors, pendant que la pointe P se meut parallèlement à l'axe des y, le point de contact de la roulette avec le plan du dessin doit rester immobile. (Voir sur la *fig.* 4 les points 8 et 8'). En étudiant la figure, on voit quelles transformations doit alors subir le parallélogramme $abdc$ et à quelles résistances devra s'opposer le contact de la roulette avec le plan contre lequel elle est appuyée.

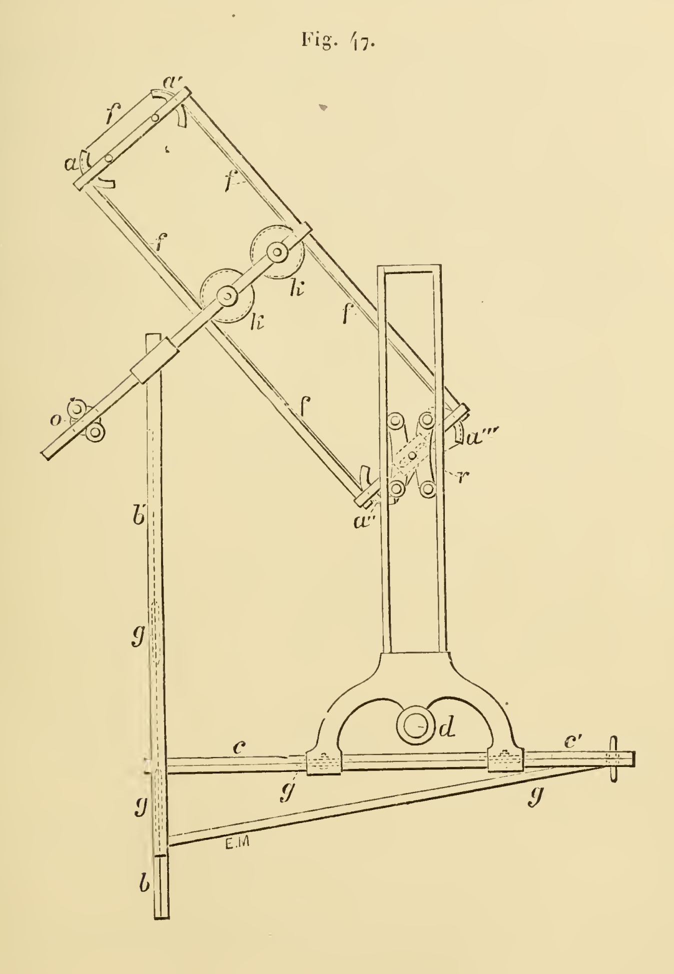
M. Mestre revendique dans son brevet l'application de son instrument à la construction de la courbe différentielle. Mais je

crois que ni ses appareils, ni tous les autres antérieurs, ne peuvent donner dans cette direction des résultats satisfaisants ([1]).

([1]) J'ai reçu de M. D. Napoli, chef du laboratoire du Chemin de fer de l'Est, une lettre concernant mon étude, dont je publie un extrait :

« Permettez-moi d'ajouter à votre description des différents intégrateurs,

Fig. 47.



quelques mots sur ce sujet dont je me suis également occupé. J'ai été chargé de construire un *dérivateur et intégrateur* de M. Mestre, que vous avez reproduit dans votre article, *Lumière électrique*, 1885. Après quelques essais préliminaires, suffisamment concluants, je suis arrivé à la certitude que l'appareil, tel

18. *Dérivation mécanique.* — Le problème de la construction de la courbe différentielle d'une courbe donnée est difficile, sinon impossible à résoudre pratiquement par les moyens mécaniques, qui fournissent des solutions générales dans le cas de l'intégration, mais s'appliquent mal, où à des cas spéciaux seulement, au problème inverse de la dérivation. C'est tout le contraire de ce que

---

qu'il m'a été présenté, était irréalisable. Le principe sur lequel il repose est juste (il est du reste le même que dans les appareils antérieurs); mais l'inventeur, en faisant son projet, n'a pas tenu compte de difficultés qu'il eût été possible de prévoir. Mais, comme je tenais à faire exécuter quand même un intégraphe, j'ai proposé un dispositif qui est représenté par la *fig.* 47, ce qui a profondément modifié l'idée première de M. Mestre. Du reste, je ne réclame, dans les nombreux détails de l'appareil, que le mécanisme destiné à maintenir, dans toutes les positions, le parallélisme entre le plan de la roulette et la directrice. Les autres organes de l'appareil se retrouvent dans les anciens intégrateurs basés sur le principe tangentiel que vous avez décrit dans votre article. J'étais obligé de renoncer à l'emploi de la roulette pouvant glisser le long d'un côté du parallélogramme articulé, comme le voulait M. Mestre, parce que les frottements et les coincements devaient fatalement empêcher le fonctionnement de l'appareil. Je ne parle pas des pantographes : ils étaient complètement inutiles.

» La *fig.* 47 représente l'ensemble de l'intégraphe que j'ai construit dans les ateliers de précision de la Compagnie de l'Est, comme un appareil d'essai. La figure explique bien son fonctionnement, et je n'ai pas besoin d'entrer dans les détails.

» On suit la courbe donnée, avec la pointe a, et c'est la roulette r, qui trace la courbe intégrale.

« Cet intégraphe ressemble beaucoup aux dispositifs existants. La seule partie nouvelle, comme je l'ai dit, est le mécanisme que j'ai imaginé pour maintenir le parallélisme entre la roulette r et la directrice passant par le point o.

» Un parallélogramme articulé $a\,a'\,a''\,a'''$ a ses deux petits côtés terminés en arc de cercle de même diamètre.

» Deux fils de soie de même longueur relient les deux sommets des angles diagonalement opposés, tout en passant par les arcs de cercle des extrémités et sur les deux poulies k, k, de façon à se croiser au milieu de la ligne des centres de ces mêmes poulies. Cette ligne des centres coïncide avec la directrice qui passe constamment par le point o.

» Cette disposition permet au parallélogramme $a\,a'\,a''\,a'''$ de se déplacer et de se déformer pour assujettir la roulette à se trouver toujours sur la même ordonnée que le style d qui suit la courbe différentielle, et à rester en même temps parallèle à la directrice.

» L'axe de la roulette est porté par un petit chariot à quatre galets, qui lui permet de monter et de descendre facilement entre les deux règles parallèles à l'axe des y.

» Les courbes intégrales tracées par cet appareil sont assez nettes.

» Évidemment, comme c'était du reste facile à prévoir, ce modèle n'a jamais pu fonctionner comme *dérivateur*. »

l'on rencontre en analyse. Ceci s'explique d'ailleurs facilement. Pour tracer la courbe intégrale on se base sur la grandeur des *ordonnées* de la courbe donnée, qui ont à chaque instant une longueur parfaitement et pratiquement déterminée, que l'on peut facilement introduire dans le dispositif mécanique.

La chose se présente autrement quand il s'agit de tracer la courbe différentielle. Il faut connaître alors la direction des tangentes à la courbe donnée ; or, il y a peu de courbes où la direction de la tangente soit déterminée par une construction géométrique simple et, pour traduire mécaniquement cette construction, il faudrait un dispositif spécial à chaque classe de courbes.

La moindre erreur dans la direction de la tangente se traduit par une différence, quelquefois très considérable dans la grandeur correspondante de l'ordonnée de la courbe différentielle et, par suite, cette dernière, tracée mécaniquement, devra présenter de fortes irrégularités.

Quand on opère l'intégration, les choses se passent d'une manière toute différente. Si, en suivant la courbe donnée avec la pointe de l'intégraphe, on s'écarte de la courbe dans la direction verticale, si l'on fait des zigzags autour de la courbe différentielle, la roulette qui trace la courbe intégrale ne reproduit jamais ces mouvements parasites. Elle pivote tout simplement autour de son point de contact ([1]). Ceci explique pourquoi les tracés mécaniques de la courbe intrégrale ont ordinairement un aspect si régulier.

La courbe intégrale tracée mécaniquement n'a jamais d'éléments verticaux, parce que, dans ce cas, l'ordonnée correspondante de la courbe donnée devrait être infiniment grande.

En considérant ce fait, on voit combien la construction d'un appareil destiné à tracer la courbe dérivée serait difficile. Si l'on prenait une pointe pour suivre la courbe, on serait constamment sujet à s'écarter dans la direction verticale du tracé de la courbe et, pour chaque mouvement pareil, le point traçant la courbe dérivée devrait s'éloigner à l'infini. On pourrait évidemment dans ce cas employer une roulette pour suivre la courbe donnée, comme on le fait dans les appareils destinés à la rectifi-

---

([1]) *Voir* les points 8 et 8′ sur la *fig.* 4.

cation des courbes planes; mais ceci présente d'autres inconvénients. Il est très difficile de suivre exactement une courbe avec une roulette; elle peut glisser verticalement si l'on rencontre une résistance considérable et, dans tous les cas, les plus petites erreurs dans son orientation se reproduisent d'une manière exagérée dans le tracé de la courbe dérivée.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DU NOUVEAU SYSTÈME D'INTÉGRATEURS.

19. Il est évident qu'au point de vue mathématique tous les intégrateurs doivent présenter un certain lien de parenté, car tous ils ont pour point de départ la même formule d'intégration. Il n'en est pas moins vrai que l'interprétation mécanique de cette formule peut varier entre des limites très étendues suivant l'ordre d'idées qui a servi de guide à l'inventeur.

Les lois d'intégration imposent aux organes mécaniques qui constituent l'intégrateur un certain mouvement que différentes combinaisons cinématiques permettent d'obtenir. Mais si l'on passait en revue tous les appareils existants, on serait conduit à établir un système général, dont les divers intruments ne présenteraient que des cas particuliers ([1]). On pourrait même, en abordant la question par différents côtés, établir plusieurs de ces systèmes.

Nous ne voulons pas refaire ici l'historique des essais, plus ou moins heureux, dont cette classification a été l'objet; nous nous bornerons à examiner les caractères distinctifs du nouveau système que nous avons décrit dans les chapitres précédents.

20. Je dois dire en commençant que l'idée qui a présidé à la construction de ces appareils les caractérise amplement. Dès l'origine je m'étais proposé de rendre possible *le tracé mécanique de la courbe intégrale* et, à ma connaissance du moins, ces instru-

([1]) Un brillant essai de ce genre a été fait par M. H.-S. Hele Shaw (voir *Proceedings* de l'institution des ingénieurs civils de Londres, 1885).

ments sont les premiers qui apportent la solution pratique du problème ainsi envisagé.

Dans tous les intégrateurs existants, nous voyons des surfaces, géométriquement définies, qui, appuyant l'une contre l'autre, accomplissent certains mouvements, tout en restant toujours en contact intime. L'une des surfaces entraîne l'autre par frottement. Différentes réactions peuvent se produire au point de contact; c'est justement le caractère de ces réactions qui a souvent servi à différentier les types d'intégrateurs.

Les surfaces peuvent glisser partiellement les unes sur les autres, ou se *dérouler* sans qu'il y ait glissement. On doit évidemment obtenir dans ce dernier cas des résultats plus précis, car il est impossible de prévoir exactement les réactions qui peuvent se produire pendant le glissement. Lorsqu'on considère les intégrateurs à ce point de vue purement mécanique, on les partage d'ordinaire en deux groupes :

1° Les intégrateurs dans lesquels le mouvement des surfaces en contact est accompagné de glissement;

2° Les intégrateurs dans lesquels les surfaces se développent les unes sur les autres en roulant sans glissement.

La majeure partie des appareils dont on fait usage, appartient au premier groupe; dans ce groupe figurent les planimètres Amsler-Laffon, Wettli-Starke, etc. Dans le second groupe nous retrouvons les intégrateurs de James Thomson, Clerk-Maxwell, Hele-Shaw, et différents autres ([1]). Envisagés à ce point de vue, mes

---

([1]) Pour faciliter la comparaison du nouveau système avec les appareils connus, nous rappellerons sommairement la construction de quelques appareils les plus répandus. Nous prendrons comme types les planimètres genre Wettli-Starke et Amsler.

a) *Planimètre linéaire de Wettli-Starke.* — On mesure, dans cet appareil, l'aire d'une courbe en comptant le nombre des tours d'une roulette, après avoir suivi avec une pointe la périphérie de la courbe donnée.

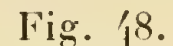
Un plateau horizontal D (*fig.* 48) mobile autour de son axe O, est monté sur un chariot à trois roues $tt't''$; ce chariot peut se déplacer facilement le long des rails r, r', r''. Sur le même chariot est montée, entre des galets g, une tige C qui a un mouvement libre dans une direction perpendiculaire à celle du mouvement du chariot. Un fil f fixé aux deux bouts de la tige, s'enroule autour de l'axe cylindrique du plateau, de sorte que lorsqu'on imprime un mouvement de translation à la tige, le plateau se met à tourner. Une roulette R, mobile autour d'un

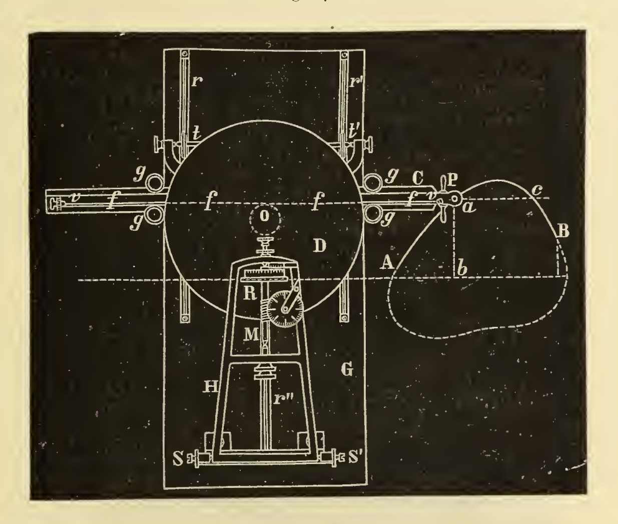
intégrateurs doivent être placés parmi ceux où le glissement n'a pas lieu.

---

axe horizontal, repose sur le plateau, sur lequel elle est appuyée par le poids du cadre H, pivotant sur les points S, S'.

Le fonctionnement de ce planimètre est bien simple. Supposons qu'il s'agisse de trouver l'aire de la courbe AB représentée par la figure. Suivons avec la pointe P l'ordonnée *ab* (l'axe des x passant par le point de contact de la roulette avec le


Fig. 48.



plateau). Le plateau va glisser sous la roulette qui ne tournera pas. Suivons maintenant la droite *ac*. Le fil communiquera le mouvement au plateau qui va tourner et entraîner dans son mouvement la roulette. Le nombre de tours de la roulette sera toujours proportionnel à l'ordonnée variable *ab*. Si nous suivons la courbe avec la pointe, la roulette va se déplacer en glissant le long du rayon et sera ainsi en contact avec des points du plateau animés de différentes vitesses. En résumé, si nous parcourons la courbe de *a* à *c*, le nombre des tours de la roulette, multiplié par une constante, donnera l'aire comprise entre cette partie de la courbe et l'axe des x.

L'appareil fait la sommation des éléments infiniment petits $y\,dx$.

On voit aisément que le résultat de l'intégration, en admettant que l'appareil soit bien réglé, dépendra des dimensions de la roulette, de l'exactitude géométrique de sa forme et de l'état de la surface du plateau.

Le glissement de la roulette dans le sens perpendiculaire à son plan est une double source d'erreur : en premier lieu, parce qu'on n'est jamais sûr des réactions en différents sens qui s'y produisent, et enfin, parce que la roulette, s'usant par le frottement, elle tend à devenir polygonale, ce qui change la loi de son mouvement, et par suite introduit une erreur dans le résultat.

Le professeur James Thomson a fait un intégrateur, basé sur un nouveau prin-

21. *Le rôle de la roulette.* — Il est un autre point de vue, auquel on peut se placer pour définir les caractères distinctifs du nouveau système d'intégrateurs.

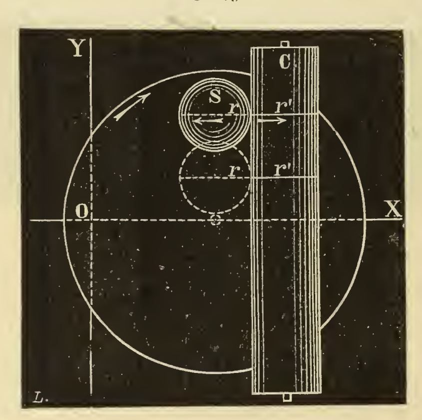
Lorsqu'on considère le rôle les différents organes qui constituent l'intégrateur, on reconnaît que c'est la roulette qui est l'organe essentiel du système. La roulette se retrouve dans presque tous les appareils antérieurs aux miens. Mais le rôle qu'elle joue est différent. Ainsi, dans les planimètres Amsler et Wettli-Starke, qui sont les représentants des deux groupes les plus répandus, l'intégrale est mesurée par *le nombre des tours de la roulette.*

Dans mes intégrateurs cette grandeur a pour mesure *le déplacement de la roulette* dans une certaine direction. La trace de la

---

cipe cinématique, qui se rapproche beaucoup, comme fonctionnement, de celui que je viens de décrire, mais qui présente ce côté caractéristique qu'il n'y a pas

Fig. 49.



de glissement et que les surfaces roulent les unes sur les autres. Cet intégrateur est représenté schématiquement sur la *fig.* 49. Nous le citons comme exemple des appareils où le glissement n'a pas lieu.

Il se compose de trois éléments : plateau, sphère et cylindre. La sphère, en touchant les points du plateau animés de différentes vitesses, tourne et transmet son mouvement rotatoire au cylindre, qui joue ici le rôle de la roulette dans le planimètre Wettli-Starke. La sphère peut se déplacer le long du cylindre en roulant sur une génératrice.

La sphère sert d'intermédiaire entre le cylindre et le plateau. Cet intégrateur a été appliqué par sir William Thomson, dans sa machine à calculer les marées.

b) *Planimètre Amsler.* — Cet admirable instrument est tellement connu et si

roulette sur la surface contre laquelle elle est appuyée, est la courbe intégrale, et ce sont les ordonnées qui donnent, à un facteur constant près, la valeur de l'intégrale. On mesure le déplacement de la roulette dans la direction des y. Le nombre de tours de cet organe ne donne que la longueur développée de la courbe intégrale.

Si l'on s'oppose au mouvement de translation de la roulette, c'est la surface qui se déplace, mais les conditions de l'intégration restent les mêmes.

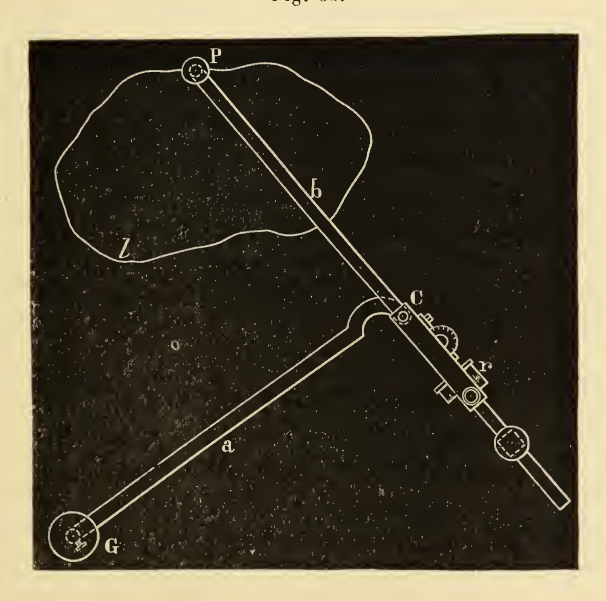
Nous pouvons tirer de cette considération des conséquences

---

répandu que nous pouvons nous dispenser de le décrire en détail et la *fig.* 50 rappellera sa construction.

Le point G reste fixe sur le plan du dessin, et l'on suit le contour de la courbe donnée avec le pointe P. Le nombre de tours de la roulette *r* mesure, à un facteur constant près, le résultat de l'intégration, c'est-à-dire l'aire de la courbe donnée.

Fig. 50.



Il est facile de voir que, pendant l'opération, la roulette se déplace dans différentes directions et qu'elle est obligée de glisser en partie et en partie de se dérouler. Il n'y a que deux positions dans lesquelles elle glisse sans rouler ou roule sans glisser. Le premier cas à lieu quand la roulette se déplace perpendiculairement à la direction de son plan de rotation, et l'autre quand elle le suit exactement.

importantes pour déterminer les conditions qui doivent être remplies par la roulette dans les intégrateurs genre Amsler et Wettli-Starke d'une part, et les miens de l'autre.

Pour rendre le raisonnement que nous allons faire, plus facile à suivre, considérons la figure schématique 7, comme type des appareils décrits dans les chapitres précédents, et nous verrons immédiatement que :

a) Dans le premier groupe, le rayon de la roulette doit être déterminé, et il ne peut varier sans changer le résultat de l'intégration, sans modifier la constante de l'appareil.

b) Dans mes intégrateurs, la grandeur de la roulette ne joue aucun rôle. Le rayon pourrait varier pendant l'accomplissement même de l'intégration sans influencer aucunement le résultat définitif : le déplacement de la roulette dans la direction des y. La roulette pourrait même avoir une forme elliptique ou, en général, quelconque ; elle pourrait changer de forme pendant l'intégration ; pourvu que sa phériphérie puisse se développer d'une manière continue sur la surface donnée, le résultat ne sera pas influencé. Il importe uniquement que le plan de la roulette se place toujours dans un plan parallèle aux directrices et que les changements de direction puissent se produire sans glissement.

Ces propriétés constituent un avantage au point de vue de la précision des résultats obtenus, parce que l'usure du bord de la roulette ne peut avoir d'influence sur le résultat final.

Cette usure est surtout fâcheuse à cause de son irrégularité qui finit par donner à la roulette une forme plus ou moins polygonale.

22. Le dispositif général indiqué par la *fig.* 7 met en évidence encore une autre propriété intéressante des nouveaux intégrateurs. Dans les intégrateurs antérieurs, la régularité de la surface sur laquelle se promène la roulette est d'une importance capitale. On voit par contre, en examinant la *fig.* 7, que dans le nouveau système cette condition n'a aucune importance, au point de vue théorique, et que la surface peut affecter une forme quelconque, pourvu que les conditions indiquées en *b*) soient satisfaites [1].

---

[1] Nous considérons ici le cas spécial de la roulette appuyée contre un plan. Quand on prend des surfaces cylindriques, les choses se passent autrement.

Il est facile de s'assurer que si la surface sur laquelle la roulette trace la courbe intégrale était ondulée, la projection de la courbe faite dans ces conditions sur le plan YOX resterait toujours la même. Le résultat définitif, le déplacement de la roulette dans la direction des y, ne serait influencé aucunement par la forme de la surface donnée. Il importe seulement que la roulette suive à chaque instant la direction imposée par la courbe $y = f(x)$.

CHAPITRE V.

LES APPLICATIONS.

---

23. Les applications de la courbe intégrale et du principe cinématique que nous avons exposé dans le chapitre précédent, sont très nombreuses. On a besoin, à chaque instant, dans les sciences physiques, de faire *la sommation d'éléments infiniment petits* $y\,dx$. Quand il s'agit seulement de trouver l'aire d'une courbe, les planimètres sont suffisants. Mais si l'on a besoin de connaître, non seulement le résultat final de l'intégration, mais encore la marche qu'elle a suivie entre certaines limites; quand on veut avoir la loi de l'accroissement de l'intégrale, représentée sous la forme d'une courbe (ce qui est souvent bien plus important que la connaissance du résultat final), on a besoin de recourir aux intégraphes qui tracent la courbe intégrale.

Nous allons donner quelques exemples caractéristiques des applications graphiques de la courbe intégrale et du principe cinématique des intégrateurs, sans entrer dans les détails; le sujet est tellement vaste, que nous serions facilement entraîné dans des développements trop étendus pour le cadre de notre étude.

C'est surtout dans la mécanique que l'on rencontre des problèmes intéressants. Les élégantes méthodes de la statique graphique donnent des exemples tout faits, qu'il ne s'agira que d'examiner au point de vue de l'intégration mécanique.

Pour montrer la variété des applications de la courbe intégrale, nous examinerons sommairement quelques exemples empruntés aux différentes sciences appliquées.

Nous sommes ainsi conduits à l'étude sommaire des diverses applications suivantes :

a. Planimétrie.
b. Tracé de quelques courbes.
c. Équations numériques.
d. Équations différentielles.
e. Moments. Centres de gravité.
f. Transport des terres.
g. Efforts tranchants et moments fléchissants d'une poutre.
h. Courbe élastique.
i. Théorie des voûtes.
k. Problèmes de construction navale.
l. Étude des systèmes en mouvement.
m. Quelques applications électriques.
n. Applications pratiques du nouveau principe cinématique d'intégration.

a. — Applications planimétriques.

24. *Applications planimétriques*. — Les ordonnées de la courbe intégrale représentent, en chaque point, l'aire de la courbe donnée, ou plus généralement, l'aire de la surface comprise entre deux ordonnées quelconques.

Le tracé de la courbe intégrale peut servir en outre pour la solution de quelques problèmes planimétriques qu'il serait difficile de résoudre en employant les planimètres ordinaires.

Prenons comme exemple l'aire de la courbe O'QRS (*fig*. 51). Soit MO'L la courbe intégrale. La longueur ML donne, à l'échelle de la figure l'aire de O'QRS.

La courbe intégrale peut encore servir à résoudre le problème suivant : *Diviser la surface donnée par des droites verticales en plusieurs parties proportionnelles à des nombres donnés* m, n, p. Prenons le cas le plus simple : le partage en deux parties qui soient dans le rapport de m à n. Divisons la droite ML qui représente la surface totale, dans le rapport donné; MH est alors une certaine ordonnée de la courbe intégrale, dont on pourra trouver la véritable position par tâtonnements, soit M'H'. L'ordonnée cor-

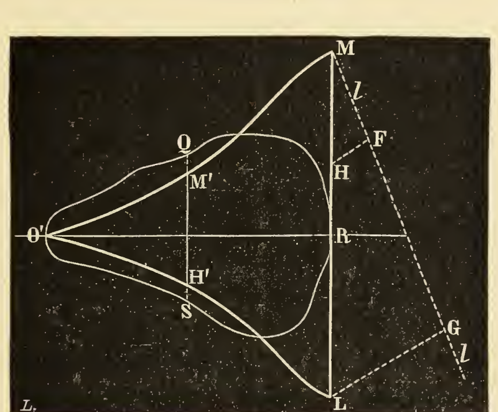
respondante QS′ divise alors la surface dans le rapport donné ; on aura :

$$\frac{O'QS}{QSR} = \frac{m}{n}.$$

On peut résoudre ce problème d'une façon beaucoup plus générale. Il est facile de partager la surface donnée par des droites passant par un point ou ayant une direction quelconque.

Nous ne croyons pas nécessaire d'indiquer les différentes solu-

Fig. 51.



tions de ce genre de problèmes planimétriques. On trouvera facilement, pour chaque cas, des solutions spéciales.

b. — Tracé de quelques courbes au moyen de l'intégraphe.

25. L'intégraphe donne le moyen de tracer plusieurs courbes d'une manière très simple. Nous nous bornerons à deux exemples : la *parabole* et l'*exponentielle*. Il est évident que la courbe intégrale d'une droite quelconque est une parabole. Il est donc extrêmement facile de tracer une parabole en employant l'intégraphe. Il s'agit seulement de déterminer l'inclinaison de la droite et la position de l'axe des x, ce qui est facile étant donnée l'équation de la parabole.

La courbe intégrale d'une *exponentielle* est aussi une *exponentielle*. Si l'on emploie pour l'intégration la même unité que pour

le tracé de la courbe donnée, les deux courbes seront identiques et *équidistantes*.

Or, si dans un intégraphe on réunit par une barre rigide la pointe qui sert ordinairement à suivre la courbe donnée, à la pointe destinée à tracer la courbe intégrale, et si l'on fait marcher l'intégraphe le long de la règle qui indique la position de l'axe des x, la roulette et la pointe sont forcées de tracer l'exponentielle, ce qui est évident [1].

c. — Représentation et résolution des équations numériques.

26. Prenons une équation de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + Jx + K = y.$$

Nous la dérivons $m - 1$ fois. Après la première opération nous obtenons

$$mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + \dots + J = \frac{dy}{dx}.$$

La constante K a disparu; on la note pour l'opération de l'intégration mécanique. En répétant la même opération $m - 1$ fois, on obtient une équation du premier degré.

$$m(m-1)(m-2)\dots Ax + \text{const} = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}.$$

C'est évidemment l'équation d'une droite que l'on peut tracer facilement. On trace alors la courbe intégrale, correspondant à la constante qui a disparu pendant la dernière dérivation; on considère alors la courbe obtenue (qui est une parabole) comme courbe donnée et l'on trace une nouvelle courbe intégrale (en introduisant la constante correspondante); après $m - 1$ opérations pareilles, faites dans les mêmes conditions, on obtient une courbe qui représente graphiquement l'équation donnée, et alors le problème posé est résolu [2].

---

(1) *Philosophical Mag.*, 1881. (V. Boys.)
(2) Zmurko, *Mém. de la Soc. des Sciences ex.*, Paris, 1879.

Prenons un exemple des plus simples. Soit

$$y = 0,1\,x^3 - 1,3\,x^2 + 5\,x - 5,6$$

l'équation donnée, qu'il s'agit de représenter graphiquement.

Différentions une première fois, nous obtenons :

$$\frac{dy}{dx} = 0,3\,x^2 - 2,6\,x + 5\,;$$

une deuxième fois,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,6\,x - 2,6$$

et une troisième fois ([1]),

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0,6.$$

Si la constante k de l'appareil était égale à 1, il n'y aurait qu'à tracer la droite $y = 0{,}6$, l'intégrer, introduire la constante $-2{,}6$ qui a disparu dans la différentiation, en commençant le tracé à l'ordonnée 2,6 au-dessous de l'axe des x pour avoir pour $x = 0$, $y = -2{,}6$. On obtient ainsi une droite dont l'équation est $y = 0{,}6\,x - 2{,}6$.

En intégrant encore une fois et en introduisant la constante $+5$, on obtient :

$$y = 0,3\,x^2 - 2,6\,x + 5.$$

Intégrant une troisième fois et introduisant la constante $-5{,}6$, on obtient la courbe cherchée :

$$y = 0,1\,x^3 - 1,3\,x^2 + 5\,x - 5,6.$$

Les intersections de la courbe, avec l'axe des x, donnent les racines de l'équation

$$0,1\,x^3 - 1,3\,x^2 + 5x - 5,6 = y.$$

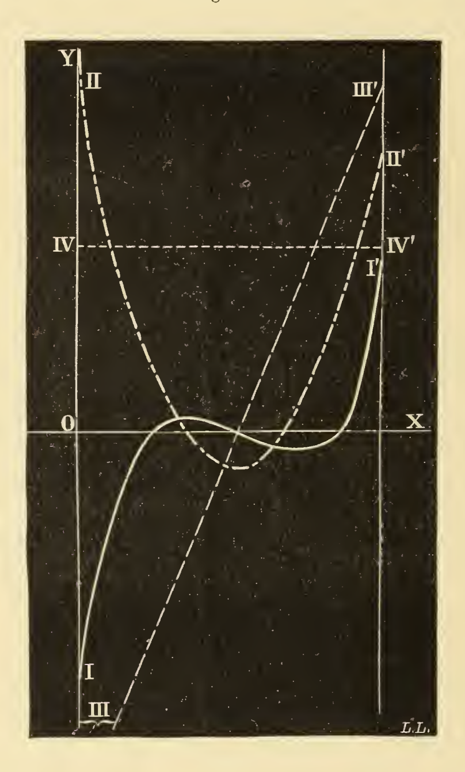
On voit donc que l'on peut se servir de la courbe intégrale

([1]) Cette dernière opération est inutile dans la pratique, parce que l'équation obtenue par la seconde dérivation réprésente une droite que l'on peut facilement tracer. En dérivant pour la troisième fois, on obtient une parallèle à OX.

pour résoudre numériquement les équations d'un degré quelconque.

Dans la pratique, on sera en général obligé de prendre une constante k autre que 1, pour avoir des courbes plus maniables.

Fig. 52.



Si la constante est k, il faudra multiplier par k chacune des équations différentielles, qui deviennent :

$$y = 0,1\,x^3 - 1,3\,x^2 + 5x - 5,6;$$

$$k\frac{dy}{dx} = 0,3\,kx^2 - 2,6\,kx + 5\,k;$$

$$k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0,6\,k^2x - 2,6\,k^2;$$

$$k^3\frac{d^3y}{dx^3} = 0,6\,k^3.$$

La *fig.* 52 représente la solution graphique de l'équation donnée. Dans cet exemple, k était égal à 2. Nous aurons donc :

$$(1) \qquad y = 0,1x^3 - 1,3x^2 + 5x - 5,6;$$

$$(2) \qquad k\frac{dy}{dx} = 0,6x^2 - 5,2x + 10;$$

$$(3) \qquad k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 2,4x - 10,4;$$

$$(4) \qquad k^3\frac{d^3y}{dx^3} = 4,8.$$

On remarquera aussi que sur la *fig.* 35, les courbes ne sont pas représentées comme elles étaient tracées par l'intégraphe. On les a rapprochées pour occuper moins de place et on les a rapportées à un axe des x commun.

Les différentes équations (1), (2), (3) et (4) sont représentées par les courbes I I′, II II′, III III′, IV IV′.

d. — Intégration des équations différentielles.

27. Étant donnée une équation différentielle explicite

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x),$$

représentée par une courbe, on opère l'intégration de cette équation en traçant $n - 1$ courbes intégrales consécutives.

Comme cette opération se répète dans presque toutes les applications de la courbe intégrale que nous décrivons plus loin, il est inutile de donner ici un exemple.

On peut aussi résoudre, en appliquant la courbe intégrale, des équations données sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \qquad \frac{dy}{dx} = f(x) + \varphi(y), \ldots$$

e. — Moments. Centres de gravité.

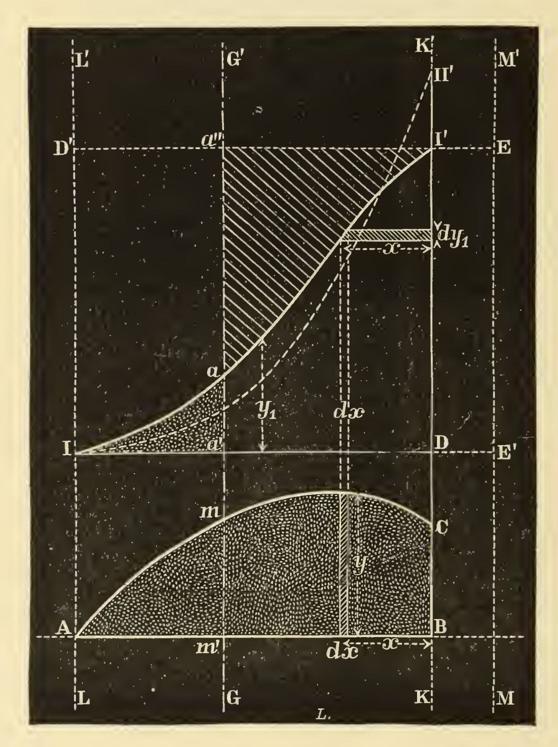
28. *Moments statiques.* — Supposons qu'il s'agisse de trouver le moment de l'aire ABCm, par rapport à l'axe donné KK′ (*fig.* 53).

Prenons un élément quelconque $y\,dx$, à la distance x de l'axe KK'. Le moment statique de cet élément, par rapport à KK' sera $xy\,dx$, et le moment de la surface totale :

$$M_1 = \int_{x=0}^{x=AB} x\,y\,dx$$

Si l'équation de la courbe AmC est donnée sous la forme $y = f(x)$,

Fig. 53.



on trouve le moment cherché en faisant l'intégration indiquée.

Appliquons l'intégraphe au même problème. Traçons la courbe intégrale II'. Désignons par y_1 les ordonnées de cette courbe. Nous savons que l'ordonnée I'D représente l'aire de la courbe donnée. Chaque élément de cette ordonnée : dy_1, représente un élément $y\,dx$ de l'aire donnée, dont nous cherchons le moment

$$dy_1 1 = y\,dx.$$

Pour obtenir un élément du moment statique, il faut évidemment multiplier dy_1 par la distance de l'élément équivalent $y\,dx$ à l'axe KK'. Cette multiplication donne l'élément horizontal (indiqué sur la figure) $dy_1 x$. En prenant la somme de tous ces éléments horizontaux, on obtient l'aire II'D qui donne le moment statique de l'aire ABCm par rapport à KK'. Si l'on trace une seconde courbe intégrale, admettant II' comme courbe donnée, la longueur DII' représentera le moment statique.

Il est facile de voir que l'aire II'D' représentera le moment de l'aire ABCm par rapport à l'axe LL'.

Le moment par rapport à l'axe MM' sera égal à l'aire II'EE'I.

Si l'axe des moments prend la position GG', le moment statique est égal à la somme algébrique des deux surfaces Iaa' et I'aa'', dont l'une est positive et l'autre négative.

On voit que $a'a'' = $ DI' représente toute la surface donnée AmCBA, que aa' est égal à l'aire Amm' et $aa'' = a'a'' - a'a = mm'$BC. Nous mettons le signe $=$, supposant que l'on multiplie les longueurs par l'unité.

Or, si l'on fait mouvoir la verticale GG' dans la direction de l'axe des x, chaque ordonnée aa' représentera la partie de la surface donnée placée à gauche de GG' et aa'', la partie de droite. Donc, pour une position de GG' telle que $aa' = aa''$, l'aire AmCB sera partagée en deux parties égales.

Puisque les surfaces Iaa' et I'aa'' représentent les moments statiques par rapport à l'axe GG', on peut trouver au moyen de la seconde courbe intégrale (III') une position de GG', telle que les surfaces des moments statiques soient égales, et alors la droite GG passe par le centre de gravité.

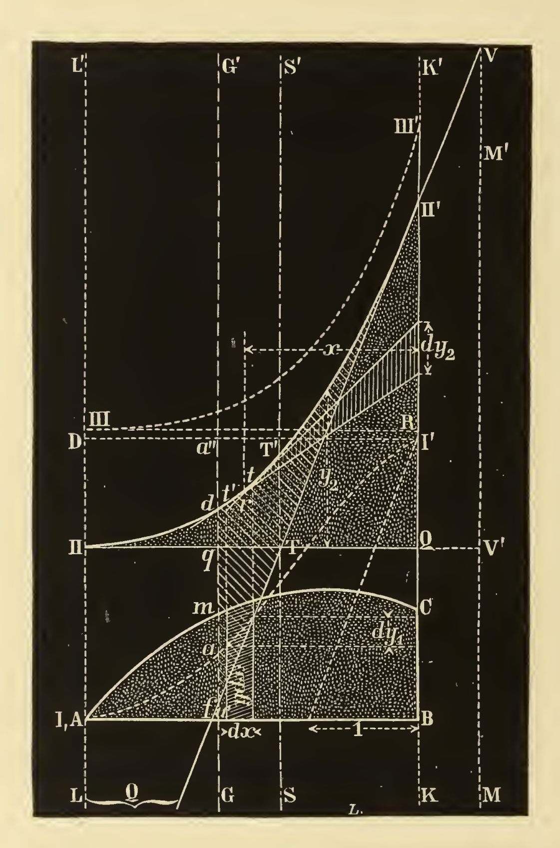
29. *Moments d'inertie.* — Le moment d'inertie d'un élément $y\,dx$ de la surface donnée, par rapport à l'axe KK' (*fig.* 54) est $= x^2 y\,dx$ et le même moment pour toute la surface donnée sera égal à

$$\int_{x=\mathrm{AB}}^{x=0} x^2 y\,dx$$

Pour arriver à obtenir graphiquement le moment d'inertie, nous

commençons par tracer la première courbe intégrale I I′ (*fig.* 54), dont l'aire I I′B représente le moment statique par rapport à l'axe KK′. Désignons les ordonnées de cette courbe par y_1, et con-

Fig. 54.



sidérons maintenant I I′ comme courbe donnée; traçons la seconde courbe intégrale II II′ : soient y_2 les ordonnées de cette courbe. L'ordonnée II′Q représente l'aire de la courbe I I′ et chaque élément dy_2 (voir la *fig.* 54), un élément de cette aire, c'est-à-dire un élément du moment statique. Pour transformer cet élément $dy_2 = x\,y\,dx$ en un élément du moment d'inertie, il faut le multiplier encore une fois par x. Il s'agit donc de trouver l'abscisse x, qui correspond à l'élément dy_2. Menons par

les extrémités de dy_2, deux tangentes à la courbe II II′ dont les points de contact sont t et t'. On obtient l'élément correspondant $y\,dx$, en traçant les verticales par t et t'. Le point d'intersection des tangentes r est situé à la distance x de l'axe KK′. L'aire du triangle ayant comme base dy_2, et dont le sommet se trouve en r, est égale à $\frac{1}{2}dy_2 x$, c'est-à-dire à la moitié du moment d'inertie de l'élément $y\,dx$, par rapport à l'axe KK′. Toute la surface II II′Q représente la moitié du moment d'inertie de l'aire AmCB.

Nous pouvons prouver, d'une façon analogue, que II Q′, représentant l'aire I I′D, est le moment statique par rapport à LL′ et que l'aire II Q′ II′ représente la moitié du moment d'inertie de l'aire donnée par rapport au même axe.

Pour un axe quelconque GG′, le moment d'inertie sera égal à deux fois l'aire II dq + deux fois l'aire II′ df.

Pour un axe MM′, se trouvant en dehors de l'aire donnée, il est égal à deux fois l'aire II II′V V′II.

30. *Moments des aires des courbes fermées.* — Soit 1 2 3 4 (*fig.* 55) la courbe donnée. On peut considérer l'aire de cette courbe comme la somme algébrique de l'aire *positive* O 3 4 1 B et de l'aire *négative* 1 2 3 OB. Pour trouver le moment statique, par rapport à la verticale passant par B, nous traçons la courbe intégrale 3′4′5′ pour l'aire positive, et la courbe 3′2′1′ pour la négative. Le moment statique cherché sera représenté par l'aire 3′4′5′B′ — 1′2′3′B′ = 1′2′3′4′5′.

Pour un axe passant par O, ce moment sera représenté par 3′4′5′6′7′ = C3′4′5′ — C7′6′5′.

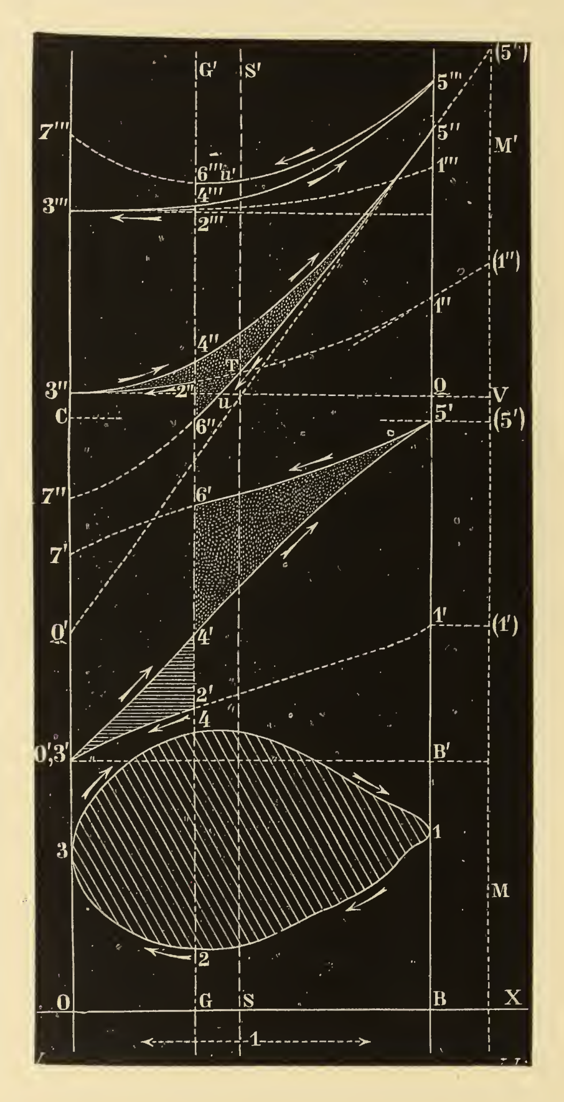
Le même moment, par rapport à l'axe GG′, sera représenté par l'aire 2′3′4′5′6′4′, dont une partie est positive et l'autre négative.

Si l'on considère MM′ comme axe, le moment statique sera représenté par 1′2′3′4′5′(5′)(1′)1′.

En traçant les secondes courbes intégrales 3″2″1″ et 3″4″5″, les moments statiques seront représentés par des segments de droites. Ainsi 1″5″ représente le moment statique, par rapport à la verticale passant par B.

Le moment statique, par rapport à OO′, est égal à l'aire 3′5′C — 7′5′C, ce qui correspond à 3″Q′ — 7″Q′ = 3″7″.

Fig. 55.



Pour l'axe GG′, ce moment est égal à 4″6″ — 4″2″ = 2″6″.
Pour MM′ il est égal à V (5″).

Le moment d'inertie par rapport à l'axe BB′ est représenté par le double de l'aire 1″2″3″4″5″.

Le moment d'inertie par rapport à OO′ est égal à deux fois l'aire 3″4″5″6″7″.

Pour l'axe GG′, il est égal à deux fois l'aire 2″3″4″5″6″2″.

Pour l'axe MM′, il est égal à deux fois l'aire 3″5″(5″)V3″.

Pour obtenir le moment d'inertie sous la forme d'une longueur, il faut tracer encore une courbe intégrale : 1‴2‴3‴4‴5‴6‴7‴.

Le double de la longueur 1‴5‴ représentera le moment d'inertie par rapport à BB′, et le double de 2‴6‴, le même moment par rapport à GG′.

En résumé, pour une position quelconque de GG′ : 2′6′ représente l'aire 1 2 3 4 ;

2″6″ représente le moment statique;

$2 \times$ 2‴6‴ représente le moment d'inertie.

Pour obtenir l'aire, il faut multiplier 2′6′ par l'unité de longueur; pour obtenir le moment statique, il faut multiplier 2″6″ par le carré de cette unité et, pour obtenir le moment d'inertie, il faut multiplier 2‴6‴ par le cube; cela est évident, parce que l'aire est une grandeur à deux dimensions, le moment statique à trois et celui d'inertie à quatre.

31. Quand, au lieu d'une surface continue, nous avons à opérer sur des ordonnées isolées (*fig*. 56) 1 1′, 2 2′, 3 3′ (qui peuvent représenter des poids isolés agissant sur une poutre), l'ensemble des opérations ne change en rien. En effet, la première courbe intégrale prendra la forme d'un polygone à côtés alternativement horizontaux et verticaux A1′1m2″n3″p. La dernière ordonnée Bp sera égale à la somme de toutes les droites données.

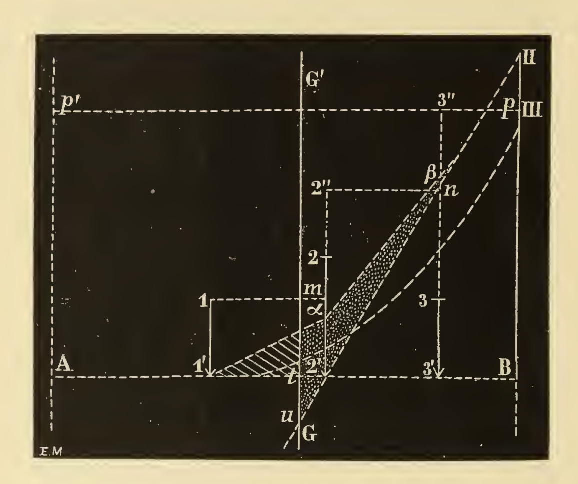
Le moment statique, par rapport à l'axe vertical passant par B, sera égal à l'aire 1′1m2″n3″pB1′. Le moment, par rapport à l'axe passant par A, sera égal à l'aire A1′1m2″n3″p′A.

Pour trouver une longueur correspondante à la valeur du moment statique, il faut tracer la courbe intégrale du deuxième ordre A1′αβII, qui aura la forme d'un polygone composé de droites inclinées. Dans le cas où les ordonnées représentent des poids isolés, ce sera le polygone funiculaire. La longueur IIB, multipliée par l'unité de construction, donne la valeur du moment statique

par rapport à l'axe passant par B, et l'aire A1′αβIIB1′, la moitié du moment d'inertie.

En traçant la courbe intégrale du troisième ordre A1′III, on

Fig. 56.



obtient la valeur de la moitié du moment d'inertie, représenté par la longueur B III.

Cette troisième courbe intégrale se compose d'arcs paraboliques.

Si nous considérons un axe quelconque GG, le moment d'inertie, par rapport à cet axe, sera égal à deux fois l'aire $\beta u t 1' \alpha \beta$.

32. *Centres de gravité.* — On trouve facilement un axe passant par le centre de gravité d'une figure quelconque, en se basant sur le fait que le moment statique par rapport à cet axe doit être égal à zéro. Or, dans la *fig.* 54, cet axe SS′ passera par le point T, qui est le point d'intersection de IIQ et II′Q′. Dans la *fig.* 55, SS′ passe par le point T, où la longueur 2″6″, qui représente le moment statique, est égale à zéro.

Pour trouver le centre de gravité, il faut changer la direction des axes de coordonnées et tracer les nouvelles courbes intégrales. On trouvera ainsi un nouvel axe, dont l'intersection avec SS′ déterminera la position du centre de gravité.

f. — Transport des terres.

33. C'est un cas spécial du problème de Monge, que nous reproduisons sous la forme indiquée par Eickemeyer. Portons sur l'axe OX (*fig*. 57) la longueur développée du tracé et en ordonnées, portons en chaque point une longueur proportionnelle à la surface transversale des déblais ou des remblais, en haut pour les déblais, en bas pour les remblais. Nous obtiendrons ainsi la courbe 0 1 2 3 4 5 6 7 8.... Les surfaces pointillées représentent alors la terre enlevée aux déblais et les surfaces en hachures, la terre nécessaire pour former les remblais.

Si nous traçons la courbe intégrale de la courbe 1 2 3 4 5 6..., nous obtiendrons la courbe 1′2′3′4′5′6′... dont les maxima correspondent au passage des déblais aux remblais et les minima, des remblais aux déblais. Traçons une horizontale quelconque Q. Elle coupera la courbe intégrale en des points tels que G et K; ces points situés sur une même horizontale indiquent qu'entre G et K le cube des remblais est égal à celui des déblais. Les points M, N, J, ont la même signification.

On peut donc diviser la ligne en sections FG, GK, KM, MN, NQ, . . ., telles que le cube de leurs remblais soit égal au cube de leurs déblais.

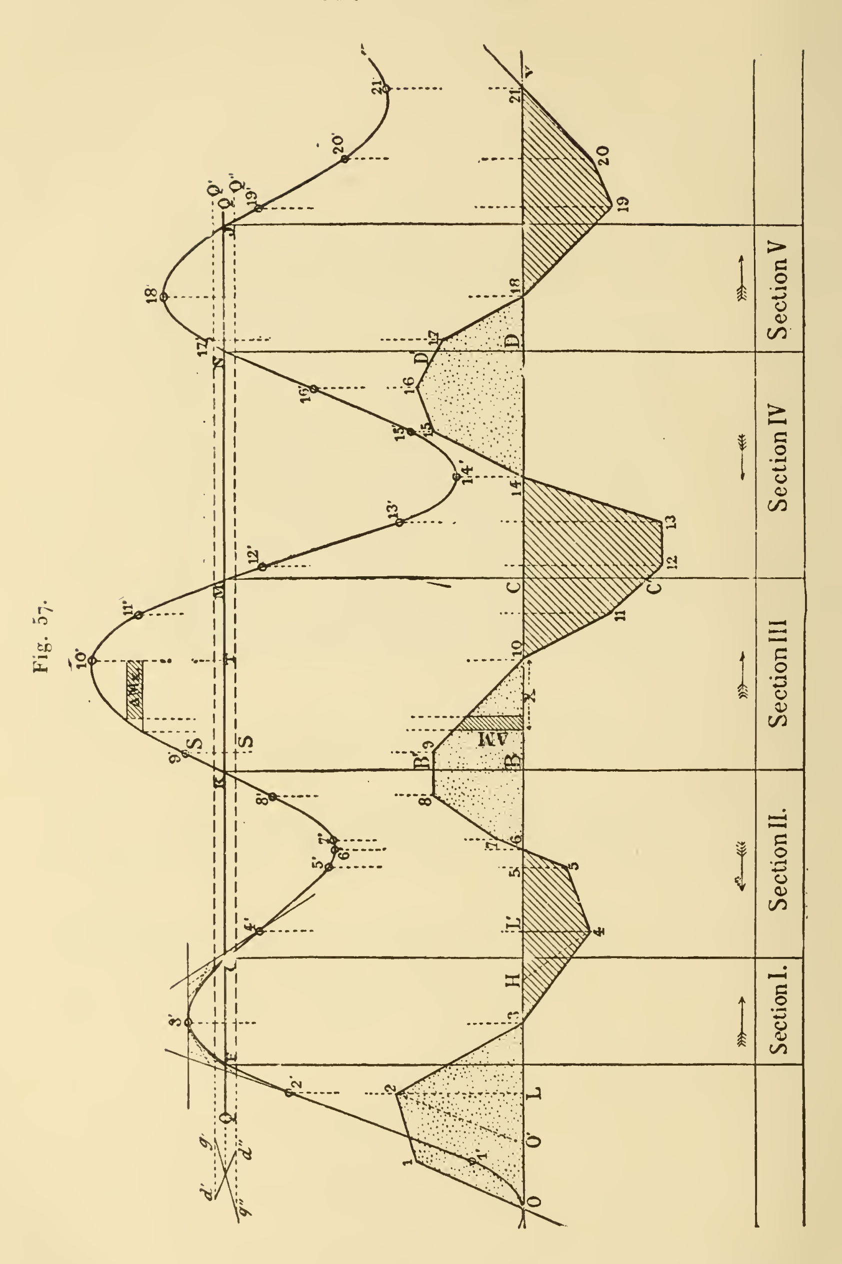
On voit que chaque ligne horizontale Q fournit une autre disposition des sections; et il faut chercher celle qui donnera le moindre prix de transport.

Nous remarquons que pour transporter la masse ΔM de terre, d'un endroit de la tranchée jusqu'au commencement du remblai, c'est-à-dire, sur une longueur X, il faudra dépenser une somme proportionnelle à $\Delta M\,X$, c'est-à-dire, à l'élément de surface $\Delta M\,X$ de la courbe intégrale.

Donc, pour transporter tous les déblais de B jusqu'en 10, commencement du remblai, la dépense sera proportionnelle à la surface de la courbe intégrale comprise entre K et T; de même, pour transporter cette masse, de T sur le remblai, jusqu'en C, la dépense sera proportionnelle à la surface comprise entre T et M.

On voit donc que la dépense sera proportionnelle aux surfaces comprises entre la courbe intégrale et la ligne horizontale Q; il

Fig. 57.



faut la placer de telle sorte que la somme de ces surfaces soit minima.

Désignons par Σg les longueurs des bases des surfaces supérieures, c'est-à-dire, dans notre cas,

$$\Sigma g = \text{FG} + \text{KM} + \text{NI},$$

et Σd, la somme des bases des surfaces inférieures $\Sigma d = \text{GK} + \text{MN}$.

Supposons $\Sigma d > \Sigma g$.

Abaissons la ligne Q, d'une hauteur Δh : la somme des surfaces sera alors diminuée de

$$\Delta h(\Sigma g - \Sigma d),$$

et il faudra abaisser la ligne tant que la somme des surfaces diminuera, c'est-à-dire, jusqu'à ce que $\Sigma g = \Sigma d$. Si l'on continuait à descendre, la somme des surfaces commencerait à augmenter.

On trouve cette position par interpolation. Soit $d'g' = \Sigma d - \Sigma g$, pour une position Q′ de la ligne horizontale que nous avons prise, au jugé, aussi près que possible de la position cherchée Q; nous portons $d'g'$ sur cette ligne Q, $d'g'$ étant positif. Nous abaissons la ligne en Q″. Nous trouvons alors $\Sigma d - \Sigma g = d''g''$ négative; nous portons cette différence en $d''g''$ sur Q′, en sens contraire de la précédente.

L'horizontale cherchée Q passe par le point d'intersection des lignes $d'd''$, $g'g''$.

g. — Efforts tranchants et moments fléchissants d'une poutre.

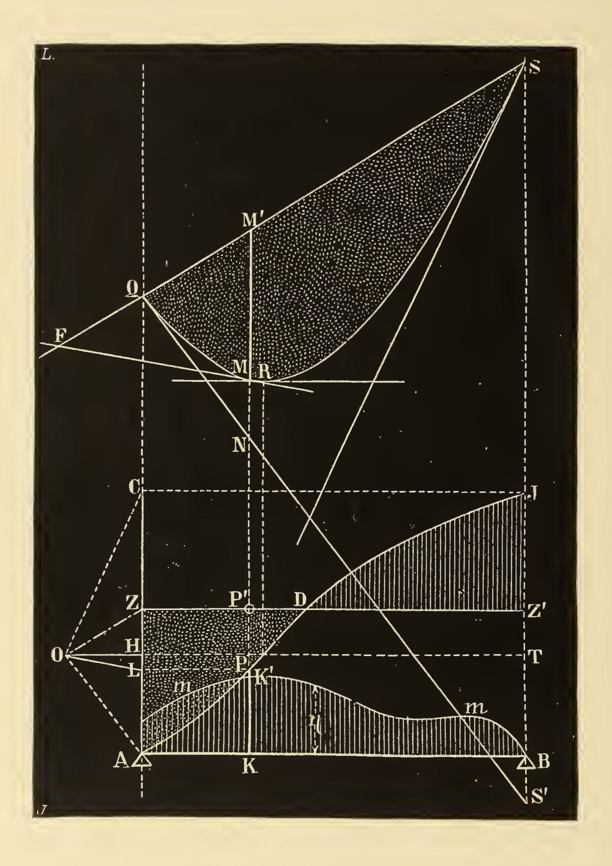
34. *Poutre reposant sur deux points d'appui.* — Soit AB (*fig.* 58) une poutre, dont la charge en chaque point est représentée par la courbe *mm*. Soient AJ la courbe des efforts tranchants et QRS celle des moments fléchissants, tracées par les procédés de la statique graphique, en employant le polygone des forces OCA, dans lequel CA représente la charge totale.

Il est facile de voir que si l'on prend la courbe de charge *mm* comme courbe donnée, et OH comme unité, et si l'on trace deux courbes intégrales consécutives, la première, ADJ, représentera les efforts tranchants, et la seconde, QRS, les moments fléchissants.

L'opération que nous avons faite n'est qu'une simple solution

graphique de l'équation différentielle représentant la courbe funiculaire QRS. En effet, désignons par y les ordonnées de la surface pointillée QRS et par η les ordonnées de la courbe de charge mm;

Fig. 58.



alors, comme on sait, l'équation différentielle de la courbe funiculaire QRS sera

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\eta}{\mathrm{OH}}.$$

En intégrant graphiquement deux fois, nous obtenons une courbe dont les ordonnées seront égales à y.

h. — COURBE ÉLASTIQUE.

35. On appelle ainsi la courbe formée par l'axe d'une poutre soumise à l'action d'une charge.

L'équation de la courbe élastique est donnée ordinairement sous la forme

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{M_s}{EM_i}$$

Dans cette équation M_s est le moment statique, M_i le moment d'inertie et E le coefficient d'élasticité.

Ordinairement, la poutre ne fléchit que très peu, son axe ne s'éloigne pas de beaucoup d'une droite; donc le rapport $\frac{dy}{dx}$ est très petit, de sorte que nous pouvons considérer le dénominateur

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}},$$

comme étant sensiblement égal à 1 sans commettre une erreur notable, l'équation approchée est alors :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_s}{EM_i}. \tag{1}$$

Comparons cette équation avec une autre :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\eta}{OH} \tag{2}$$

qui représente la courbe funiculaire (voir n° 34).

Nous voyons immédiatement la parenté de ces deux équations. Ainsi, nous pouvons considérer la courbe élastique comme une courbe funiculaire pour le tracé de laquelle on a pris les ordonnées égales à M_s, à la place de η, et le produit EM_i à la place de l'unité OH.

Or, comme pour chaque section de la poutre, M_s est proportionnel à l'ordonnée correspondante de la surface des moments QRS (*fig.* 58), on obtient directement la courbe élastique en

admettant que la courbe des moments remplace celle de la charge mm, et que l'on trace pour cette nouvelle charge la courbe funiculaire (prenant EM_i comme unité), selon les procédés du paragraphe 34.

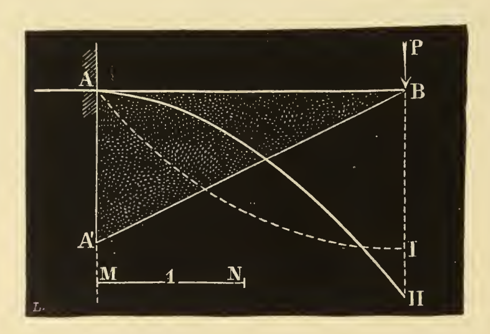
Ordinairement le produit EM_i est très grand, et l'on est forcé de se servir d'une autre unité de construction. Dans ce cas, toutes les ordonnées de la courbe élastique ainsi obtenue sont augmentées dans le rapport de EM_i à OH. Ce changement d'échelle est même indispensable pour pouvoir appliquer les procédés graphiques, car autrement la courbe élastique ne différerait pas beaucoup d'une droite.

Le professeur Mohr a indiqué en 1868 ce rapport entre les équations (1) et (2). Cette considération de la surface des moments, comme surface de charge, et de la courbe élastique comme courbe funiculaire correspondante, a donné des résultats remarquables dans les applications de la statique graphique, surtout dans le calcul des poutres reposant sur plusieurs points d'appui.

Nous allons examiner quelques applications, se rapportant aux cas les plus simples.

a) *Poutre encastrée à l'une de ses extrémités et chargée à*

Fig. 59.



l'autre d'un poids P (*fig.* 59). — Soit AB, la poutre en question. La surface des moments se réduira à un triangle ABA'.

Pour obtenir la courbe élastique, nous considérons A'B comme courbe de charge et nous traçons les deux courbes intégrales AI et A II. Cette dernière est la courbe funiculaire correspondante à

la courbe de charge A'B; elle représente donc la courbe élastique.

Au lieu de prendre comme unité le produit EM_i nous avons pris une longueur MN, ce qui fait que pour obtenir les vraies ordonnées de la courbe élastique, il faut multiplier celles du tracé graphique par

$$\frac{MN}{EM_i}.$$

Dans ce problème, ainsi que dans les suivants, nous admettons que le moment d'inertie reste constant pour toutes les sections.

Comme la poutre est encastrée au point A, le premier élément de son axe reste forcément horizontal, ce qui nous indique que l'axe des x doit passer par le point A.

b) *Poutre reposant sur deux points d'appui, et chargée d'un poids* P (*fig.* 60). — L'aire des moments sera représentée par le triangle ACB.

Pour tracer la courbe élastique, nous commençons par tracer la première courbe intégrale AI dont la dernière ordonnée BI représente l'aire du triangle ACB.

Pour tracer la seconde courbe intégrale, nous prenons un point quelconque O, placé à une distance OH, égale à l'unité, de la verticale passant par A; ensuite nous menons par ce point l'axe des x, OHL, et nous traçons la seconde courbe intégrale QRS, qui doit représenter la ligne élastique.

La figure nous indique que la position de l'axe des x est fausse, parce que la courbe QRS ne répond pas à la condition imposée par le problème. Le point S ne se trouve pas sur la même horizontale que Q; il n'est donc pas sur le point d'appui.

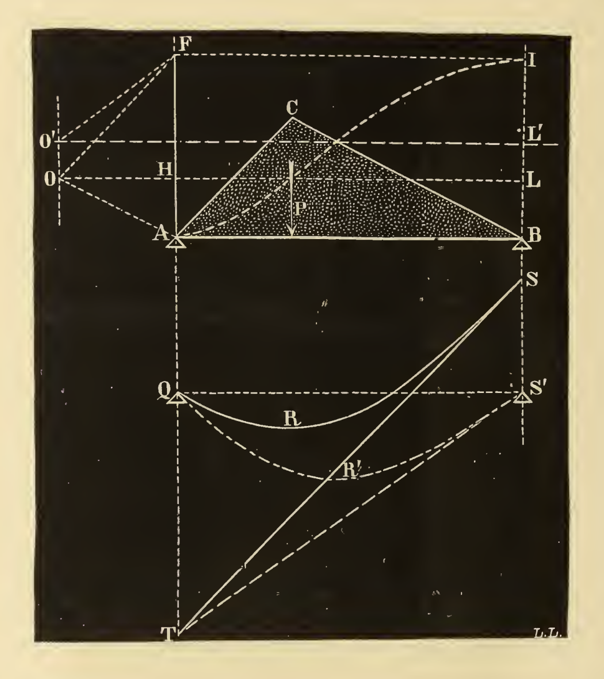
Mais, il est facile de changer la position du point S, en changeant la position de l'axe des x, que nous avons fait passer par un point arbitraire O. On peut toujours trouver une position de ce point, par exemple O', telle que la courbe intégrale correspondante QR'S' remplisse les conditions voulues.

Pour trouver immédiatement la position du point O', nous prolongeons la tangente à la courbe QRS au point S, jusqu'au point T.

La tangente correspondante de la courbe QR'S' doit aussi passer

par le point T, ce qui veut dire que la longueur QT reste constante pour toutes les positions du point O. On le verra facilement en se rappelant (n° 29) que QT représente le moment statique de l'aire

Fig. 60.



ACB par rapport à l'axe AT, et que cette grandeur est constante et complètement indépendante de la position du point O.

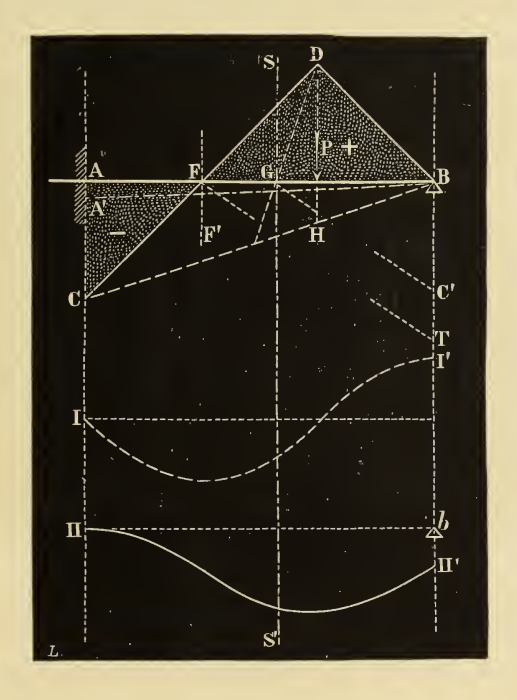
Mais d'un autre côté, la tangente TS est parallèle à OF; ayant maintenant la direction réelle de cette tangente, (soit S'T) en menant par F une parallèle FO', nous déterminerons le point O' par lequel doit passer l'axe des x; la seconde courbe intégrale, construite en partant de ce nouvel axe, nous donnera la ligne élastique dans sa vraie position.

c) *Poutre encastrée au point* A *et reposant librement en* B *sur un point d'appui* (*fig.* 61). — Supposons que cette poutre soit soumise à l'action du poids unique P. Si la poutre AB était librement appuyée à ses deux bouts sur les deux supports, le

triangle CBD représenterait l'aire des moments statiques. Mais l'encastrement a pour effet de produire des moments négatifs et la droite CB va changer de position. Supposons qu'elle ait pris la position BA. Alors l'aire des moments est composée de deux parties : l'une négative, ACF, et l'autre positive, FDB.

Selon les règles indiquées plus haut, nous considérons cette

Fig. 61.



aire comme la courbe de charge, et nous traçons les deux courbes intégrales I I′ et II II′. Pour tracer cette seconde courbe, nous avons choisi une position de l'axe des x telle que le premier élément, se trouvant en II, soit horizontal. C'est une condition imposée par l'encastrement.

La seconde courbe intégrale doit représenter la courbe élastique. Nous remarquons qu'elle ne satisfait pas aux conditions du problème, parce que le point II′ ne coïncide pas avec b, ce qui est indispensable. Cela prouve que nous avons mal choisi la nouvelle

position de BC et que la longueur CA doit avoir une autre valeur.

En se basant sur la condition, que la seconde courbe intégrale II II′, doit passer par le point b, nous pouvons trouver la vraie grandeur de AC. Chaque ordonnée de la courbe II II′ représente le moment statique de la partie correspondante de l'aire ACFDBA, donc b II′ est le moment statique de l'aire ACFDBA par rapport à l'axe B II′.

Comme b II′ doit être égal à zéro, le moment de l'aire ACFDBA, par rapport à l'axe vertical passant par B, doit être égal à zéro.

Nous pouvons considérer l'aire ACFDBA comme la somme algébrique de + CDB et — ACB. Le moment statique de la somme de ces deux triangles par rapport à B II′ doit être égal à zéro.

Si la droite SS′ passe par le centre de gravité du triangle CDB, et la droite FF′, par celui du triangle ABC, le moment statique de la surface pointillée par rapport à B II′ sera égal à zéro, si l'on satisfait à la proportion

$$\text{CDB} : \text{GB} :: \text{ABC} : \text{FB}.$$

On peut considérer les triangles CDB et ABC comme ayant la même hauteur AB et les bases DH et AC différentes, donc

$$\text{DH} : \text{GB} :: \text{AC} : \text{FB}.$$

De cette relation on tire immédiatement la valeur cherchée

$$(a) \qquad \text{AC} = \frac{\text{DH}.\text{GB}}{\text{FB}}.$$

Il est facile de trouver graphiquement la valeur de AC. Nous prenons BT égal à DH; nous joignons T et F (qui se trouve au tiers de AB) et menons par G une parallèle à FT qui détermine le point C′ sur la verticale passant par B.

BC′ est égal à la longueur cherchée AC, parce qu'il est évident que BC′ : BG :: BT : FB; donc

$$\text{BC}' = \frac{\text{BT}.\text{BG}}{\text{FB}} = \frac{\text{DH}.\text{GB}}{\text{FB}}$$

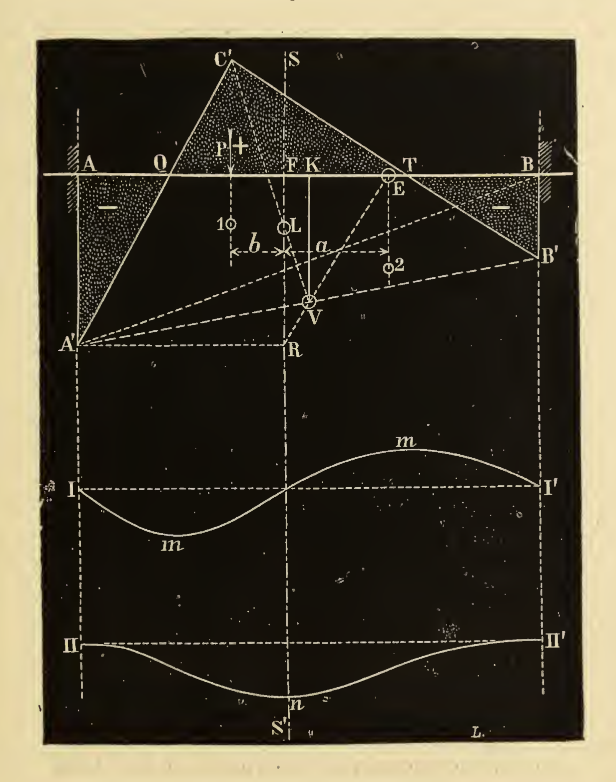
ce qui répond à la formule (a).

Nous portons la valeur ainsi obtenue, qui représente le moment négatif d'encastrement, de C à A′ et nous traçons la droite A′B.

La courbe élastique qui correspond à l'aire ainsi obtenue, remplira toutes les conditions voulues.

d) *Poutre encastrée aux deux extrémités* (*fig.* 62). — Si la poutre était simplement appuyée en A et B, l'aire des moments,

Fig. 62.



pour un poids unique aurait la forme d'un triangle A'B'C'. Mais, comme les moments deviennent négatifs aux points d'encastrement, la droite A'B' va changer de position, et venir par exemple en AB. L'aire des moments sera composée de trois triangles dont deux négatifs AA'Q et BB'T, et un positif, QC'T.

Il s'agit de trouver les valeurs de AA' et de BB'.

Supposons que le problème soit résolu et que AA' et BB' donnent les valeurs réelles des moments négatifs aux deux points d'encastrement. Soit I*m* I' la première, et II*n* II' la seconde courbe

intégrale. Cette dernière représente la courbe élastique, laquelle doit avoir ses éléments extrêmes sur la même horizontale II II'.

On satisfait à cette condition seulement dans le cas où le point I' se trouve sur la même horizontale que I, c'est-à-dire dans le cas où la droite I I' est une horizontale. Ceci implique que la surface pointillée doit être égale à zéro :

$$-\mathrm{AA'Q} + \mathrm{QC'T} - \mathrm{BB'T} = 0.$$

En outre, comme les ordonnées de la seconde courbe intégrale représentent les moments statiques de l'aire pointillée, et comme la dernière ordonnée, passant par II' est égale à zéro, le moment statique de cette aire, par rapport à l'axe vertical passant par B doit être égal à zéro.

Nous obtenons ainsi, par la discussion des propriétés des deux courbes intégrales I I' et II II', les deux conditions suivantes, auxquelles doit satisfaire l'aire AA'Q C'T B'B T QA :

1° Cette aire doit être égale à zéro;

2° Son moment statique par rapport à BB' doit être égal à zéro.

Cela suffit pour trouver facilement les valeurs de AA' et BB'.

On peut considérer la surface pointillée comme la somme algébrique des aires du triangle positif A'B'C' et du trapèze négatif AA'B'B. Ces deux aires doivent être égales, pour satisfaire à la première condition.

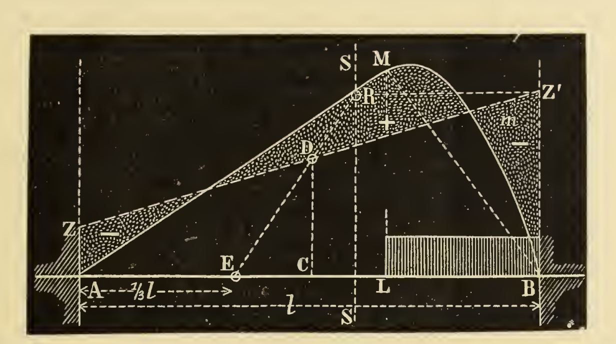
La deuxième condition nous indique que le moment statique du trapèze négatif + le moment du triangle négatif doit être = à zéro et comme les deux aires sont égales, le centre de gravité du trapèze, doit se trouver sur une même verticale que le centre de gravité du triangle. Ceci indique comment on peut trouver la forme du trapèze AA'B'B. Son centre de gravité doit se trouver sur la droite S'S, passant par L, centre de gravité du triangle A'B'C'. On trouve un point appartenant à la droite A'B' en menant KV perpendiculaire à AB, par le point K milieu de AB et prenant KV tel que KVAB soit égal à l'aire du triangle A'B'C'. Pour trouver un autre point appartenant à la droite A'B', nous prenons $\mathrm{BE} = \frac{\mathrm{AB}}{3}$; menons la droite EV, que nous prolongeons

jusqu'à R. FR est égal à AA′ et la position du point A′ est ainsi déterminée. On s'explique facilement, par un calcul élémentaire, le sens de ces opérations.

Dans tous les exemples cités, nous avons adopté un poids unique comme charge. Mais les solutions indiquées sont générales et peuvent s'appliquer facilement à toutes sortes de charges. On peut aussi les étendre aux poutres reposant sur plusieurs points d'appui.

Toutes les constructions indiquées dans ce paragraphe pour

Fig. 63.



trouver la forme de la ligne élastique et la grandeur des moments d'encastrements ne sont exactes que dans le cas où le moment d'inertie est constant pour toutes les sections de la poutre.

Les procédés indiqués peuvent être appliqués à une charge répartie d'une manière quelconque. Prenons, par exemple, une poutre AB (*fig.* 63) encastrée à ses deux extrémités et chargée partiellement, de B à L, d'une manière continue et uniforme. La surface des moments est alors limitée par une droite AM et par un arc de parabole M*m*B. Pour trouver la position de la droite ZZ′, nous déterminons, avant tout, l'axe SS passant par le centre de gravité de l'aire AM*m*BA et la grandeur de cette aire. Nous divisons cette grandeur par AB et nous obtenons ainsi la longueur CD, que nous portons en ordonnée au centre de la poutre. Nous joignons ensuite le point E (se trouvant à la distance $\frac{1}{3}l$ de A) avec D, et prolongeons ED jusqu'à R. Une horizontale, tracée par R, détermine le point Z′, et ZZ′ est la position de la droite cherchée.

i. — Théorie des voutes.

36. La théorie graphique des voûtes se base sur le tracé de la *courbe des pressions*. Cette théorie ne donne pas les moyens de calculer une voûte d'avance; elle donne seulement la possibilité d'essayer si une voûte projetée se trouve en équilibre. On procède ordinairement de la manière suivante. On détermine les dimensions de la voûte d'après les données fournies par la pratique et l'on cherche ensuite, en traçant la courbe des pressions, si l'on a satisfait aux conditions de l'équilibre.

Soit TQPNM (*fig*. 64), la section d'une demi-voûte et de sa surcharge. Admettons, pour simplifier le problème, que la voûte elle-même, ainsi que la surcharge, soient faites d'une matière homogène.

Si nous enlevions en réalité la moitié de la voûte, il faudrait appliquer à sa place une force R pour maintenir l'équilibre. Cette force, la poussée horizontale, combinée avec les poids élémentaires successifs de la voûte, forme la courbe des pressions HgC, dont nous n'avons pas besoin de décrire la signification mécanique.

On obtient ordinairement cette courbe de la manière suivante.

On porte sur une verticale, le poids total de la demi-voûte, soit HI′, ensuite on porte sur une horizontale passant par H la valeur de la poussée horizontale HO′; on considère le point O′ comme pôle, et l'on trace un polygone funiculaire qui enveloppe la courbe HgC. Chaque côté de ce polygone donne la position de la résultante de la poussée horizontale et du poids de la partie de la voûte se trouvant à droite. Ainsi, le côté passant par g donne la position de la résultante de la poussée R et du poids de PNMQ. Sa valeur est représentée par O′I′.

La voûte se trouvera en équilibre

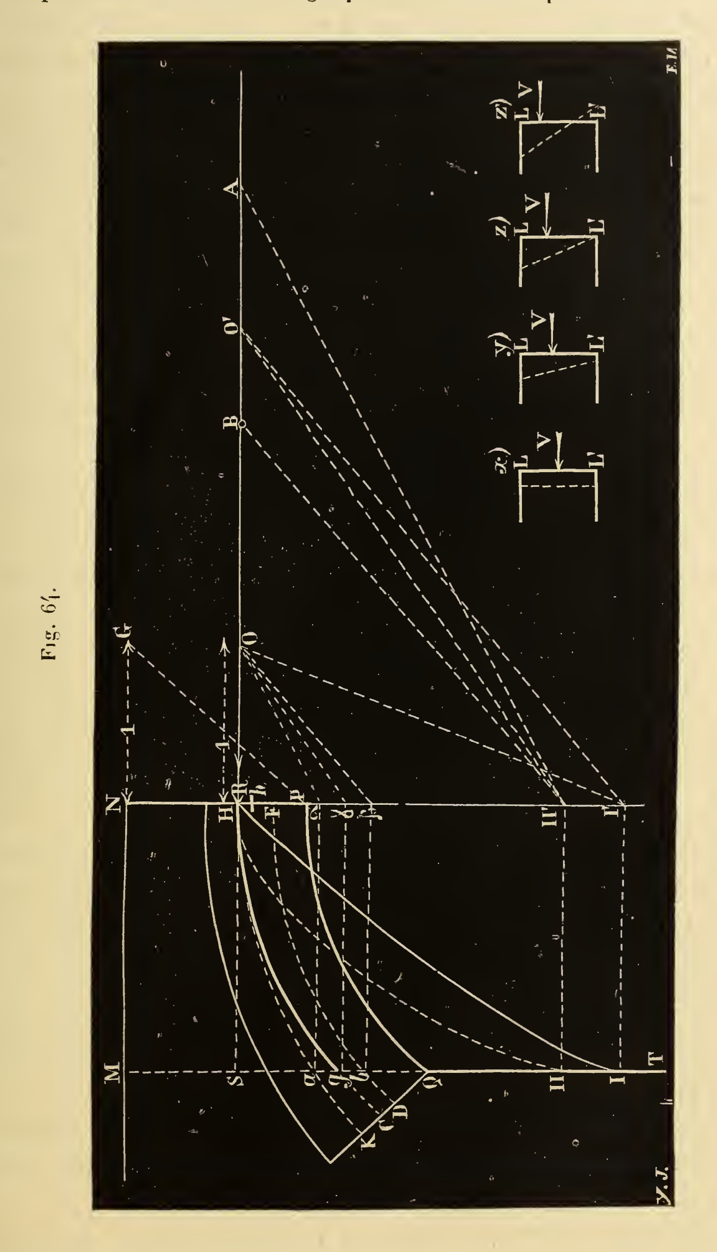
1° Si l'on peut tracer une courbe des pressions, qui ne sorte pas du tiers intérieur de la hauteur des voussoirs;

2° Si la courbe des pressions rencontre les joints sous un angle qui ne dépasse pas celui qui est imposé par le coefficient de frottement;

3° Si les forces agissant sur chaque joint ne sont pas trop grandes, par rapport à la résistance de la matière dont la voûte est construite.

La première condition exige que la courbe des pressions soit ren-

Fig. 64.



fermée entre les courbes HK et FD qui partagent la hauteur radiale

de la voûte en trois parties égales. C'est la conséquence des conditions imposées par la pratique et se résumant en ceci : *Il n'est pas admissible qu'un point quelconque du joint soit soumis à un effort de tension.*

Les *fig.* x, y, z, z', placées en bas de la *fig.* 64, expliqueront mieux ces relations. Soit LL' un des joints. Si la force V agit au centre de gravité (cas x) du plan matériel du joint, ce plan va se déplacer parallèlement à lui-même et prendra la position pointillée.

Si nous appliquons la force V un peu plus haut (cas y), alors l'axe neutre, qui se trouvait dans le premier cas à l'infini, va se rapprocher et le plan du joint, en tournant autour de cet axe, prendra la position inclinée, indiquée en y. Évidemment, la pression par unité de surface sera plus grande près de L que près de L'.

Si nous faisons encore monter le point d'application de la force V, nous arriverons à une position telle (cas z), que l'axe neutre viendra toucher la section, et alors la pression par unité sera nulle en L'.

Si nous continuions à faire monter le point d'application de V, nous arriverions au cas z', où les efforts de tension entrent déjà en jeu près du point L', ce qui est inadmissible, parce que le joint de la voûte s'ouvrirait en ce point-là.

Ainsi, le cas z donne la limite de la position du point d'application de la force V, et cette limite se trouve au *tiers* de la hauteur du joint, à partir de l'extrados. En faisant descendre V, on trouve sur le joint une autre limite du même genre.

Après avoir fait ces quelques remarques générales, nous pouvons passer à l'application de la courbe intégrale. Il est évident que la courbe des pressions est la seconde courbe intégrale de la courbe donnée PQ, en prenant NM comme axe des abscisses et la poussée horizontale comme unité de construction.

Il faut donc commencer par tracer la première courbe intégrale pour l'aire MNPQ. Nous ne savons pas encore en quel point, entre H et F, est appliquée la poussée horizontale; admettons que c'est au point H, point limite supérieur de la clef. Nous ne connaissons pas la valeur de la poussée horizontale et nous sommes obligé d'admettre une unité de construction arbitraire OH.

Nous commençons par tracer la première courbe intégrale, à partir du point H. Le premier élément de cette courbe sera paral-

lèle à GP; soit HI, cette première courbe intégrale. Sa dernière ordonnée, IS, multipliée par OH donne l'aire MNPQ.

L'aire HISH représente le moment statique de l'aire MNPQ, par rapport à TM.

Traçons maintenant la seconde courbe intégrale HII en partant de l'axe SH. Si la poussée horizontale OH est bien choisie, si sa valeur répond à la réalité, HII sera la courbe des pressions cherchée. Il est évident que sur notre dessin cette courbe ne répond pas aux conditions imposées, parce qu'elle n'est pas comprise entre FD et HK. Donc la poussée horizontale ne peut pas être égale à OH.

Si nous augmentons convenablement l'unité de construction OH, si nous la faisons, par exemple, égale à O'H, alors la seconde courbe intégrale répondra aux conditions exigées, et prendra la forme HgC. Alors gS, multiplié par O'H sera égal au moment statique de l'aire MNPQ, par rapport à l'axe MT.

Pour le premier tracé, le même moment était égal à SII.OH, donc

$$gS.O'H = IIS.OH,$$

d'où

$$O'H = \frac{IIS.OH}{gS}.$$

Cette équation nous donne le moyen de résoudre le problème suivant : *Ayant pour la section d'une voûte* MNPQ *la seconde courbe intégrale* HII, *tracée avec une unité arbitraire* OH, *trouver une unité de construction* O'H, *telle que la seconde courbe intégrale passe par le point* g.

On porte, dans ce but, sur une verticale passant par H, de H à γ une longueur $H\gamma = Sg$ et une autre longueur $HII' = SII$. Le point d'intersection O', de la droite II'O', parallèle à γO, avec l'horizontale passant par H, donne la grandeur cherchée O'H, ce qui est évident, parce qu'alors :

$$II'H : \gamma H :: O'H : OH$$

ou

$$IIS : gS :: O'H : OH,$$

donc

$$O'H = \frac{IIS.OH}{gS}.$$

ce qu'il fallait démontrer.

La position du point *g* ne peut varier qu'entre les limites *a* et *b*; or, si nous répétons pour les points *a* et *b* l'opération que nous avons faite pour le point *g*, nous trouverons deux valeurs de la poussée horizontale, AH et BH. En partant de AH, la courbe des pressions passera par *a* et en partant de BH, elle passera par *b*.

La poussée horizontale ne peut pas être plus petite que BH, ni plus grande que AH, parce que la courbe des pressions sortirait du tiers intérieur du joint de naissance. Mais cela n'empêche point que la courbe de pression ne puisse dépasser les limites indiquées par les courbes HK et FD, dans un endroit quelconque de son parcours. Pour s'en assurer, on trace encore entre les deux verticales MT et NP une série de verticales, et l'on fait la même construction graphique. On trouve alors des limites A et B, telles que, pour chaque point intermédiaire O′, la courbe de pression ne dépassera pas les limites indiquées par les courbes HK et FD.

Jusqu'à présent nous avons commencé par tracer la courbe intégrale à partir du point H. On pourrait, avec autant de raison, commencer en *h* ou en F, et pour chacune de ces positions on peut trouver les limites correspondantes A et B. Mais nous ne savons pas où passe la *véritable* courbe de pression et la statique ne donne pas les moyens de trouver le point d'application de la poussée horizontale. Ordinairement on commence par tracer la courbe des pressions au point H se trouvant au tiers de la hauteur à partir de l'extrados, et cette courbe s'approche du tiers de la hauteur du joint du côté de l'intrados, à l'endroit où se trouve le joint de rupture.

Cette courbe n'est pas nécessairement la *vraie*, mais seulement *la plus désavantageuse* de celles qui sont *possibles*.

La voûte se trouvera en équilibre, si l'on peut trouver les limites A et B. Cela n'est pas toujours possible. Dans certains cas A se confond avec B ou passe même de l'autre côté, et alors il est impossible de tracer la courbe intégrale satisfaisant à la condition 1.

La *fig*. 65 représente l'application de la méthode indiquée à un cas particulier. On suppose donnée, la voûte QPP′Q′ avec sa surcharge MNP′Q′. Il s'agit de savoir si cette voûte satisfait aux conditions de l'équilibre.

Pour pouvoir faire le tracé graphique, il faut que la masse de la surcharge et de la voûte soit homogène. Comme ordinairement le

poids spécifique de la voûte est plus grand que celui de la sur-

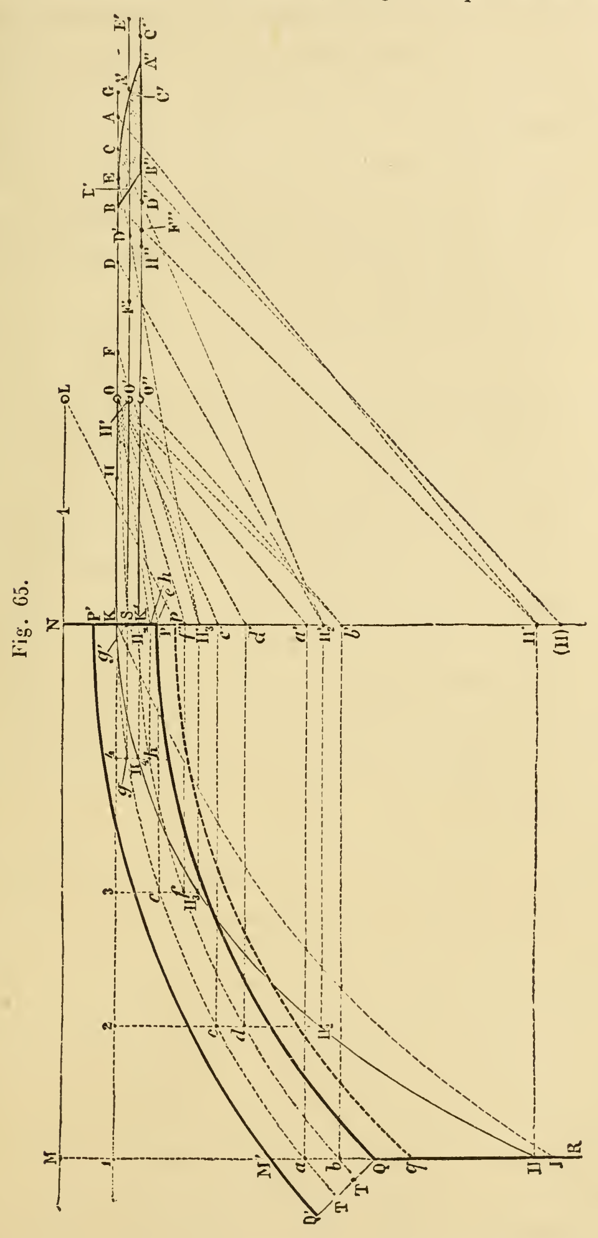


Fig. 65.

charge, il faut transformer la figure donnée. Nous augmentons

l'aire de la voûte QPP'M' dans le rapport des poids spécifiques correspondants. On obtient facilement la nouvelle courbe en changeant les ordonnées de l'aire M'P'PQ, dans le rapport indiqué. On arrive ainsi à la courbe *pq* et alors on peut considérer l'aire NM*pq* comme homogène.

Pour tracer la courbe, nous adoptons MN pour l'axe des x. Soit NL notre unité.

Nous commençons par tracer la première courbe intégrale, à partir du point K, qui se trouve dans une position telle que KP' est égal à un tiers de P'P.

Le premier élément est parallèle à L*p* et cette courbe aboutit au point I.

L'ordonnée I 1 multipliée par NL représente l'aire MN*pq*.

Nous traçons ensuite la seconde courbe intégrale en commençant par le même point K.

Nous transportons seulement l'axe des x, de NL en KO, pour avoir le premier élément horizontal; KO est l'unité adoptée pour le tracé.

Cette seconde courbe intégrale aboutit au point II. L'ordonnée 1 II, multipliée par KO, donne l'aire 1 KI, qui représente le moment statique de l'aire MN*pq* par rapport à l'axe MR.

Cette seconde courbe intégrale KII est aussi la courbe des pressions correspondant à une poussée horizontale égale à OK.

Il est évident que la valeur de cette poussée était mal choisie, parce que la courbe des pressions ne se trouve pas entre les arcs KT et K'T'.

Pour trouver les limites entre lesquelles peut varier la valeur de la poussée horizontale, nous procédons de la même manière que sur la *fig.* 64. Nous augmentons la longueur de OK dans le rapport de 1 II à 1 a et de 1 II à 1 b. Dans ce but, nous reportons horizontalement les points a et b dans la position a' et b'; réunissons a' avec O et traçons par II' une droite II'A parallèle à a'O. Nous trouvons ainsi la limite A qui indique que la poussée horizontale ne peut pas être plus grande que KA, parce qu'autrement la courbe des pressions passerait au-dessus du point a.

Nous répétons la même construction graphique pour le point b et nous trouvons la limite B, qui indique que la poussée horizontale ne peut pas être plus petite que KB, parce qu'autrement, la courbe intégrale passerait au-dessous de b.

Nous traçons ensuite plusieurs verticales $2H_2$, $3H_3$, $4H_4$, et nous trouvons la position des limites pour chacune de ces sections verticales.

Ainsi, pour la section $2H_2$, la courbe des pressions ne doit pas dépasser le point *c*, ni descendre plus bas que le point *d*. Pour obtenir les limites correspondantes de la poussée horizontale, nous reportons horizontalement les points *c*, *d* et H_2 en c' d' et H'_2. Nous réunissons ensuite c' avec O et menons par H'_2 une parallèle à $c'O$ qui donne le point C. On obtient ainsi la limite que la poussée horizontale ne peut pas dépasser. On obtient de la même façon le point D.

Si nous répétons la même opération pour les points *e*, *f*, ainsi que *g*, *h*, nous trouvons les différentes valeurs de la poussée horizontale, *qui ne peut pas être plus grande que,*

KA, KC, KE et KG

et qui ne peut pas être plus petite que,

KB, KD, KF et KH.

Nous choisissons entre ces huit limites, deux, qui sont les plus rapprochées, l'une appartenant aux maxima et l'autre aux minima. Ce sont les points E et B qui nous donnent ces limites définitives.

Au lieu de choisir K comme point de départ pour la courbe des pressions, on peut faire le même tracé pour chaque point intermédiaire entre K et K′. On obtiendra ainsi pour chaque cas les limites correspondantes.

Sur la *fig.* 65 nous avons fait cette construction graphique pour le point K′ et pour le point S, qui se trouve au centre de PP′ [1].

Si la poussée horizontale est appliquée au point S, elle ne peut pas être plus petite que SB′, ni plus grande que SC′.

---

(1) On n'a pas besoin de changer la position des points a', b', c', d', il suffit de faire descendre les points H'_2 H'_3, H'_4, de la même quantité que le point d'application de la poussée horizontale. Ainsi, pour le point K′, le point H′ était déplacé verticalement en bas, dans la position (H). Évidemment H″ (H) doit être égal à KK′. Pour trouver, dans ce cas la limite *b*, nous réunisssons b' avec O″ et menons par le point (H) une parallèle à $b'O''$ qui donne le point cherché B″.

Si elle est appliquée au point K′, elle ne peut pas être plus petite que K′B″, ni plus grande que K′A″.

En réunissant par des courbes les points BB′B″, ainsi que EC′A″, on obtient la surface pointillée BEA″B″, dans laquelle doivent se trouver toutes les extrémités des poussées horizontales.

M. A. Durand-Claye est arrivé en 1867 à trouver cette surface en suivant une voie un peu différente ([1]).

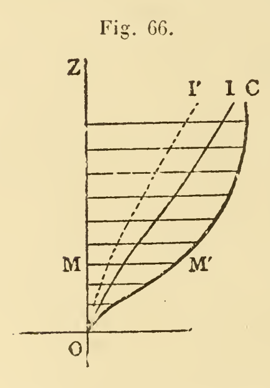
S'il est impossible de tracer la surface BEA′B″, il est aussi impossible de tracer la courbe des pressions satisfaisant à la condition 1.

Ce cas peut se présenter, quand les limites minima des poussées horizontales sont plus grandes que les limites maxima.

k. — Problèmes de construction navale.

37. D'après les renseignements que m'a communiqués M. J. Pollard, professeur à l'École d'application du génie maritime, les ingénieurs de la marine font depuis longtemps usage de méthodes de calcul dans lesquelles les courbes intégrales jouent un rôle important. La théorie même des courbes intégrales et leur application aux calculs des navires a été présentée, il y a longtemps déjà, par M. l'ingénieur Rossin, mort en 1855, et introduite, d'une façon complète, dans l'enseignement de l'École d'application du génie maritime, depuis plus de trente années.

Fig. 66.



Dans l'étude géométrique des carènes de navires, on est conduit fréquemment à considérer les aires d'une série de surfaces telles que OMM′ (*fig.* 66), limitées à un axe OZ, à un contour courbe OM′C et à des ordonnées MM′. On doit établir sous forme de tableaux, de courbes et d'échelles les résultats des calculs, de manière à obtenir la valeur de l'aire pour une ordonnée quelconque. Les calculs sont généralement effectués par la méthode de quadrature des trapèzes (en Angleterre, par celle des paraboles).

([1]) *Annales des Ponts et Chaussées,* 1867, A. Durand-Claye.

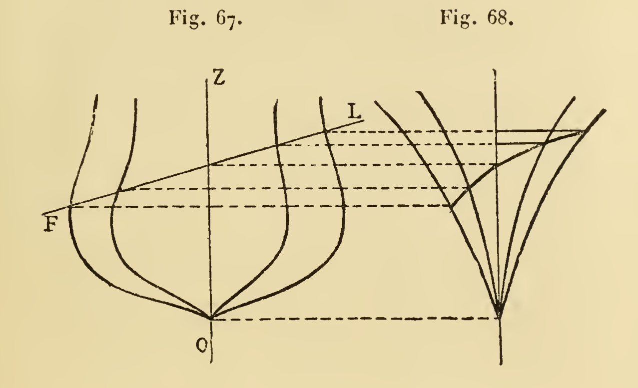
La courbe intégrale I est alors tracée par les procédés en usage chez les constructeurs de navires, c'est-à-dire, en appliquant une latte flexible sur les points fournis par le calcul.

Le tracé de l'intégrale du second ordre I' permet d'obtenir les hauteurs des centres de gravité des premières surfaces considérées.

Pour les volumes, on procède d'une façon analogue, en prenant pour ordonnées MM' de la courbe initiale OM'C, des longueurs proportionnelles aux aires des sections du solide à étudier, sections faites par des plans parallèles. L'étude des volumes et de leurs moments est ainsi ramenée, par cet artifice, à celui de surfaces.

Nous donnons ci-dessous deux figures (*fig.* 67 et 68), mon-

Fig. 67. Fig. 68.



trant le parti que l'on tire des courbes intégrales appliquées à un plan de navire. La *fig.* 67 représente, projetés sur un plan vertical transversal au navire, les contours des sections faites par des plans parallèles et que l'on nomme sections transversales ou couples. Comme le navire est symétrique par rapport à son plan diamétral (ou longitudinal) projeté sur la figure suivant OZ, on se contente de ne considérer que la moitié du navire et de figurer d'un côté les projections des couples de la portion située en avant du couple milieu (à droite sur le dessin), et de l'autre, la projection des couples de la portion située à l'arrière du milieu.

Le solide qui constitue la carène du navire, c'est-à-dire la portion susceptible d'être immergée et qui doit être soumise aux calculs, est ainsi étudié par un réseau de sections parallèles équi-

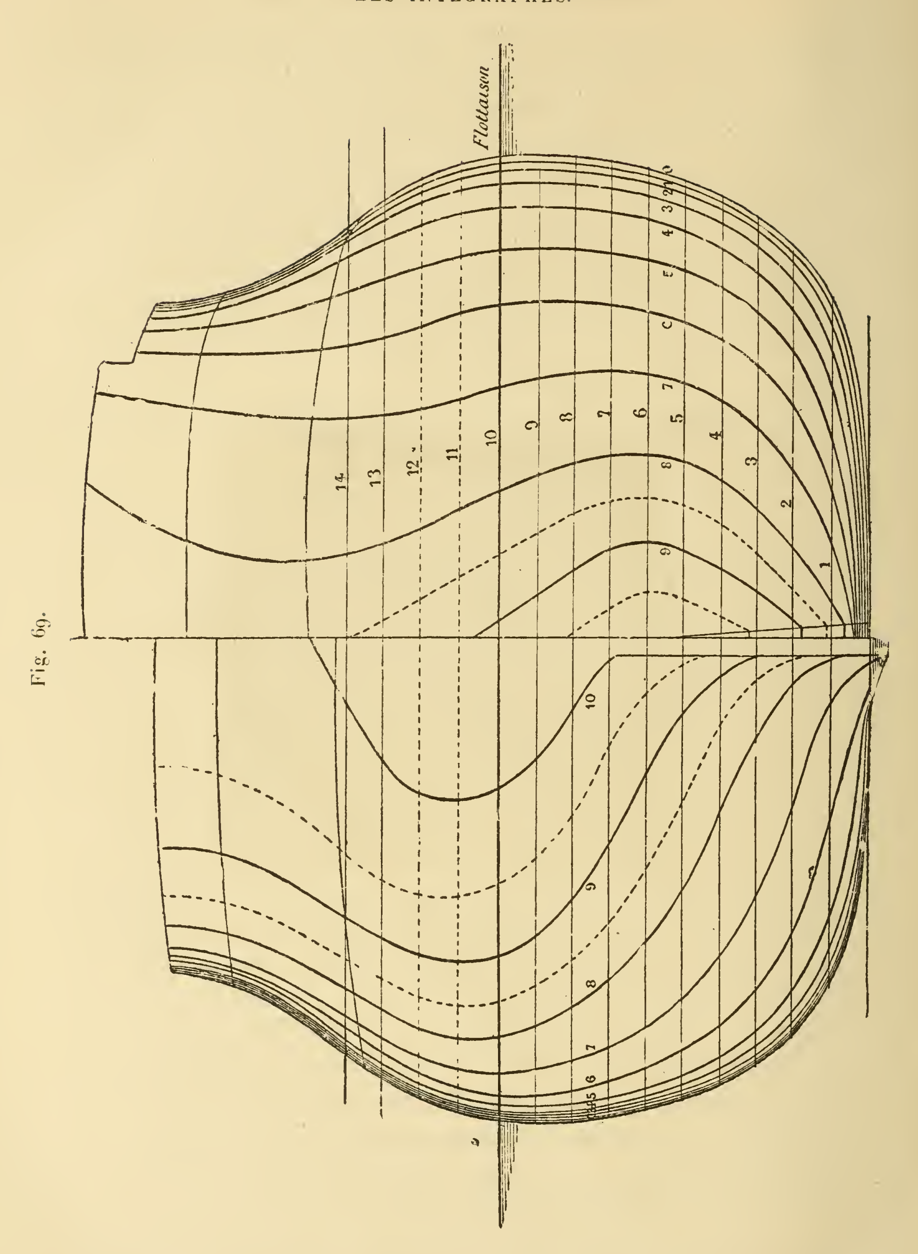


Fig. 69.

distantes, généralement au nombre de vingt, dans la longueur du navire.

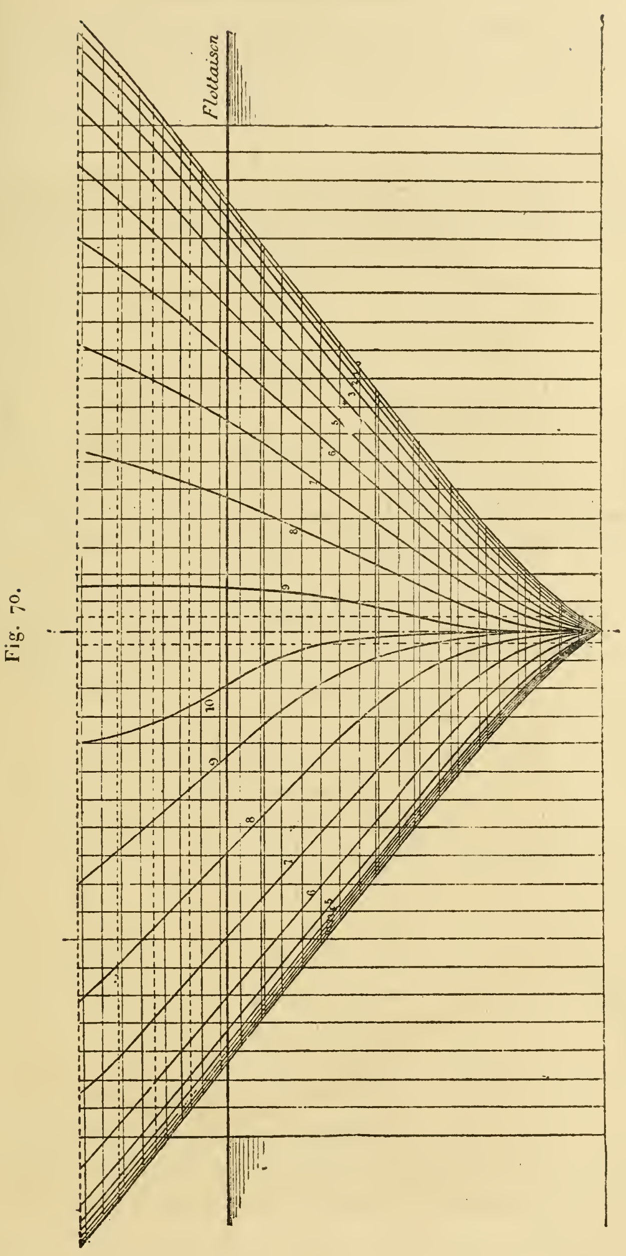


Fig. 70.

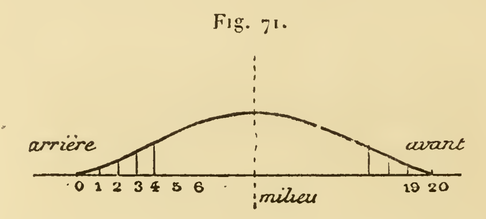
Des sections horizontales, dix ou douze, suivant les cas, sont figurées par leurs tracés sur le plan transversal.

La *fig.* 68 représente un tracé déduit directement du précédent. Chacune des courbes est la courbe intégrale du contour d'un couple du navire; la disposition correspond dans les deux figures.

Les *fig.* 69 et 70 représentent le tracé exact pour un navire cuirassé de grandes dimensions.

Si l'on suppose la carène coupée par un plan de flottaison FL perpendiculaire au plan de la figure, normal ou oblique au plan

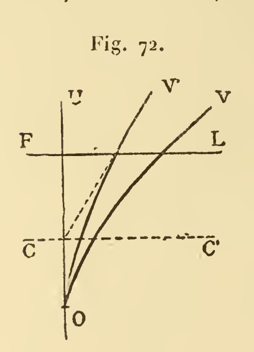
Fig. 71.



diamétral, c'est-à-dire à OZ, on pourra relever aisément sur la *fig.* 68, la valeur de la surface découpée sur chacun des couples et obtenir ainsi les ordonnées d'une courbe auxiliaire, dite courbe des aires des couples (*fig.* 71), dont l'aire proprement dite servira à mesurer le volume de la carène, et dont le centre de gravité sera situé dans le même plan transversal que le centre même du volume de la carène correspondante.

Si, maintenant, on effectue cette opération pour un réseau de flottaisons parallèles, on en déduira les éléments nécessaires pour tracer la courbe ou l'échelle des volumes successifs OV rapportée à l'axe OU (*fig.* 72). En traçant la courbe intégrale OV′ de OV, on a un moyen facile de construire graphiquement la trace d'un plan parallèle à la flottaison FL et contenant le centre du volume de la carène limitée à cette flottaison.

Fig. 72.

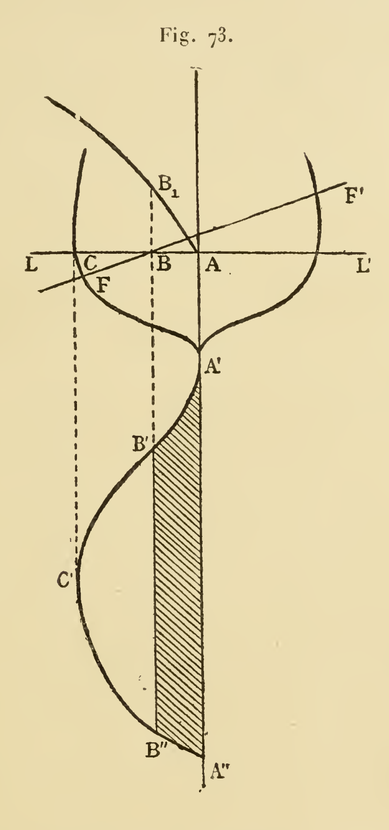


Dans la méthode primitive de M. Rossin, on construisait les courbes intégrales des lignes d'eau ou sections horizontales de la carène. Ainsi, soit LL′ (*fig.* 73) la trace sur le couple milieu, d'une ligne d'eau dont le contour est figuré sur une autre projection. (L'échelle des longueurs est, sur la figure, notablement différente de celle des largeurs.)

La courbe AB_1 (choisie dans ce cas) donne, par ses ordonnées, telles que BB_1, l'aire de la portion ombrée.

Lorsque ensuite on veut tracer sur la projection du couple

Fig. 73.



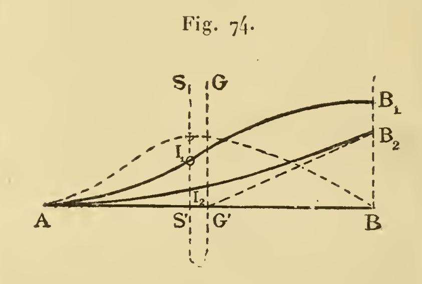
milieu la trace d'une flottaison quelconque, FF′, on relève, à son intersection avec chaque ligne d'eau, la valeur de l'aire comprise à l'intérieur de la carène. On obtient ainsi les éléments nécessaires pour calculer et tracer une courbe auxiliaire, dite courbe des aires des lignes d'eau, dont la surface fournit le volume de la carène considérée et dont le centre de gravité se trouve dans un même plan parallèle aux lignes d'eau que le centre de la carène elle-même.

Les courbes intégrales sont aussi employées comme artifice propre à faciliter la solution des problèmes suivants, qui se posent fréquemment en architecture navale.

Tracer le contour d'une surface (courbe pointillée *fig.* 74), *dont l'aire est donnée, dont le sommet* (ordonnée maximum) *et le centre de gravité sont à des distances données des extrémités.*

On mène par G' (projection sur AB du centre de gravité de la surface cherchée), une droite telle que $G'B_2$, puis on en trace une courbe telle que AI_2B_2, assujettie seulement : 1° à être tangente en A à l'axe AB; 2° à présenter sur l'ordonnée ss' du sommet,

Fig. 74.



dont l'abscisse AS' est une des données du problème, un véritable sommet géométrique (c'est-à-dire un maximum ou un minimum de courbure); 3° d'aboutir en B_2; 4° d'y être tangente à $G'B_2$ et d'y avoir une courbure nulle.

Ce tracé effectué, on en déduit, par points, la courbe différentielle AI_1B_1; elle aura en I_1 un point d'inflexion, et en B_1, une tangente parallèle à AB en B_1.

Ceci posé, si S est l'aire proposée et BB_1, l'ordonnée extrême ainsi obtenue, on tracera la courbe différentielle de AI_1B_1, en prenant pour constante une longueur auxiliaire $\frac{S}{BB_1}$ de telle sorte que

$$y = K\frac{dy_1}{dx}; \quad y_1 = \frac{1}{k}\int y\,dx = BB_1.$$

Cette courbe satisfera aux conditions proposées et sera une des solutions, en nombre infini, du problème.

Voici un autre exemple de l'emploi des courbes intégrales dans l'étude des navires.

Lorsqu'on veut étudier la solidité des charpentes qui constituent la coque des navires, on est réduit à établir des comparaisons

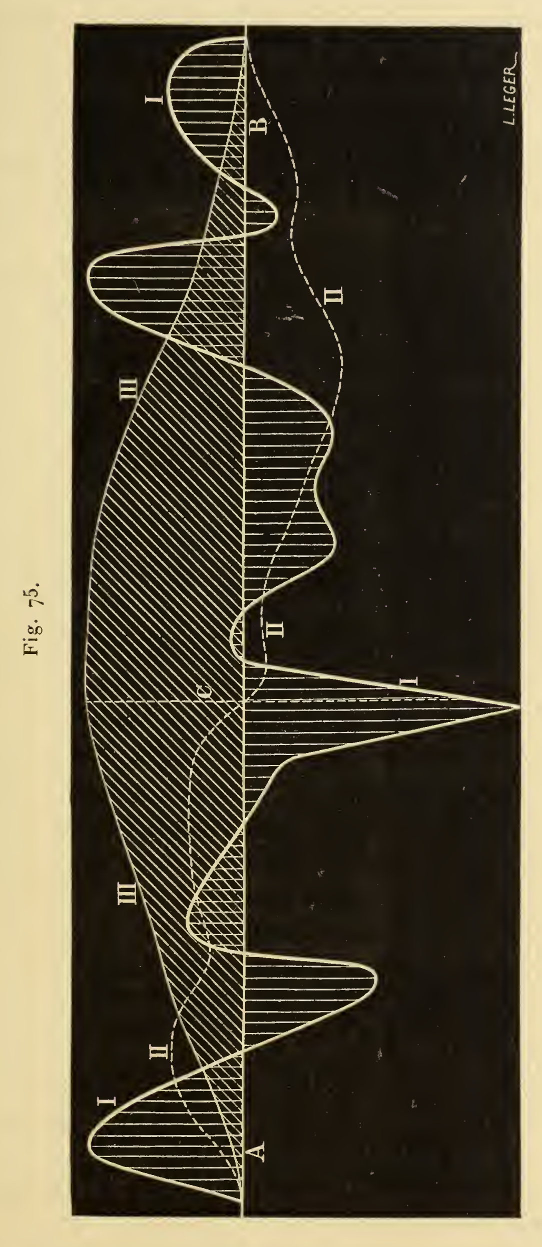


Fig. 75.

entre les fatigues éprouvées par les liaisons dans des circonstances analogues.

Ainsi, considérons la coque d'un navire flottant en eau calme; divisons-la dans le sens de la longueur en un certain nombre de tranches verticales et évaluons, d'une part, les poussées de bas en haut dues au liquide, et les charges de haut en bas dues aux poids qui se trouvent à bord. Représentons graphiquement ces données sous forme de courbes des poussées p, et courbes des poids π.

Ces deux courbes ont même aire, puisque le navire est en équilibre et flotte librement.

$$\int_A^B p\,dx = \int_A^B \pi\,dx.$$

Si nous construisons la courbe I (*fig.* 75), dont les ordonnées sont

$$c = \pi - p,$$

nous aurons à chaque tranche la valeur de la charge réelle; sa surface totale sera égale à zéro.

$$\int_A^B c\,dx = \int_A^B (\pi - p)\,dx = \int_A^B \pi\,dx - \int_A^B p\,dx = 0.$$

La courbe intégrale II, du premier ordre, donne en chaque tranche les efforts tranchants subis par la charpente.

La courbe intégrale du deuxième ordre représentée par III, donne les moments fléchissants. Connaissant les moments d'inertie des diverses tranches de la charpente de la coque on en déduira les sections qui fatiguent le plus et la grandeur même de la fatigue.

Prenons encore un exemple. Dans l'étude de la stabilité des navires, on est conduit à représenter les résultats des calculs effectués sur les plans de formes par deux courbes.

La première, dite *courbe de stabilité statique*, a pour abscisses les angles θ, dont le navire est incliné transversalement (avec la condition que le volume immergé reste constant), et pour ordonnées, les couples correspondants C.

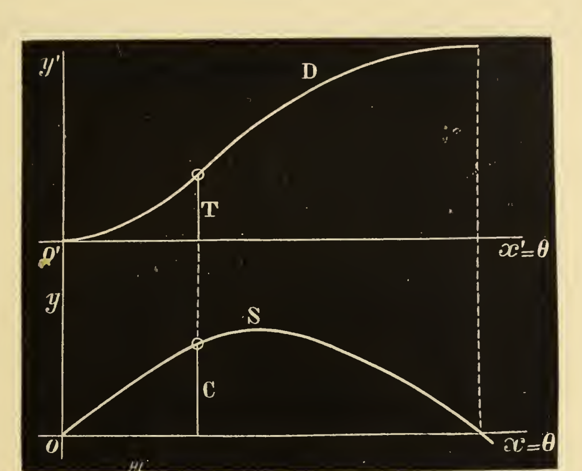
La seconde, dite *courbe de stabilité dynamique*, a pour abscisses les angles θ dont le navire est incliné, et pour ordonnées, le travail T du couple de stabilité, depuis l'inclinaison, o, jusqu'à l'inclinaison θ.

$$T = \int_0^\theta C\,d\theta.$$

C'est donc la courbe intégrale de premier ordre de la courbe de stabilité statique. Les deux courbes sont représentées sur la *fig.* 76. Jusqu'ici, cette courbe est tracée à l'aide d'un certain nombre de points dont les ordonnées sont calculées numériquement.

Ordinairement, ces diverses courbes intégrales sont obtenues

Fig. 76.



par le calcul numérique de leurs ordonnées, procédé sûr, mais lent et pénible. L'emploi de l'intégraphe est tout indiqué pour accélérer, simplifier les opérations, et étendre le nombre de leurs applications.

I. — Étude des systèmes en mouvement.

38. *Courbe des accélérations, des vitesses et des espaces parcourus en fonction du temps.* — Les courbes intégrales peuvent s'appliquer avec avantage à l'étude des systèmes en mouvement.

Si nous connaissons la relation entre le temps et l'espace parcouru par un point matériel M quelconque, l'état dynamique de ce point est défini par l'équation

$$e = f'(t). \tag{1}$$

On connaît alors la vitesse

$$(2) \qquad v = \frac{de}{dt} = f'(t),$$

et l'accélération

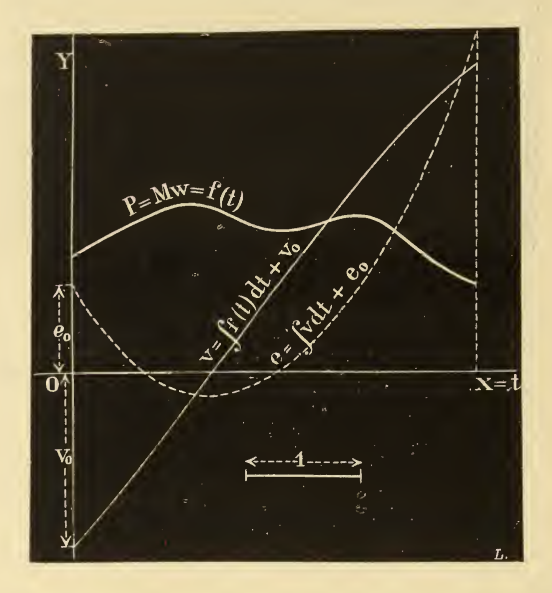
$$(3) \qquad w = \frac{d^2e}{dt^2} = f''(t).$$

Cette dernière équation nous donne immédiatement l'effort appliqué P :

$$P = Mw = M\, f''(t).$$

Quand le phénomène observé est donné par la représentation

Fig. 77.



graphique de l'équation (1), il faut différentier graphiquement pour obtenir les courbes des vitesses et des efforts. Dans ce cas l'intégraphe ne peut être appliqué que pour le contrôle des courbes différentielles, en faisant l'opération inverse. Cela peut être d'une certaine utilité, parce que la différentiation graphique ne donne des résultats exacts que dans des cas tout à fait spéciaux, et qu'on peut facilement commettre de très grandes erreurs.

On part alors de la courbe des efforts (ou des accélérations), et l'on trace deux courbes intégrales consécutives dont la première représentera les vitesses, et la seconde les espaces parcourus; on obtient ainsi un moyen de contrôle de l'opération de différentiation.

Le problème se présente autrement quand on a le tracé de la courbe des efforts (ou des accélérations) en fonction du temps. Alors l'intégraphe peut tracer immédiatement la courbe des vitesses et des espaces parcourus.

Si l'on a comme courbe donnée

$$P = Mw = f(t),$$

la première courbe intégrale donnera

$$v = \int f(t)\,dt + v_0.$$

et la seconde

$$e = \int v\,dt + e_0.$$

La *fig.* 77 indique les opérations successives.

39. *Application de l'intégraphe à la balistique.* — Un des principaux problèmes de la balistique est celui du mouvement du projectile dans l'âme du canon.

La méthode d'expérimentation la plus répandue, consiste à obtenir les espaces parcourus par le boulet et, de là, à en déduire sa vitesse et son accélération, qui nous feront connaître à chaque instant la pression des gaz.

On peut aussi étudier le mouvement de recul du canon et, dans ce cas encore, ce sont toujours les espaces que l'on détermine en fonction du temps.

Supposons que l'on puisse trouver l'équation de la courbe des espaces, soit : $e = F(t)$; on en tirerait aisément les vitesses et les accélérations :

$$v = F'(t) \quad w = F''(t).$$

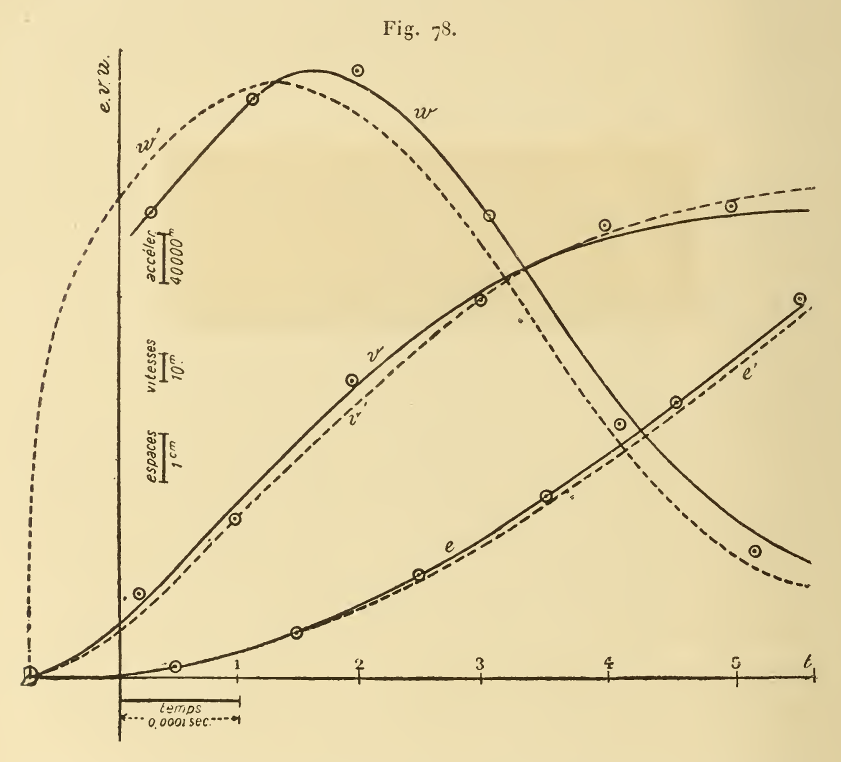
$F'(t)$ et $F''(t)$ désignant les deux premières dérivées de $F(t)$ par rapport au temps, comme nous l'avons déjà dit, n° 38.

Mais, en pratique, il serait trop long de chercher une fonction correspondant aux points trouvés; on préfère opérer graphique-

ment. On trace une courbe continue se rapprochant autant que possible des points donnés; pour trouver ensuite un certain nombre de points de la courbe des vitesses, on divisera la première en un certain nombre d'intervalles, et l'on prendra pour inclinaison de la tangente moyenne, celle de la sécante.

On trouve ainsi un certain nombre de valeurs $F'(t)$ qu'on por-

Fig. 78.



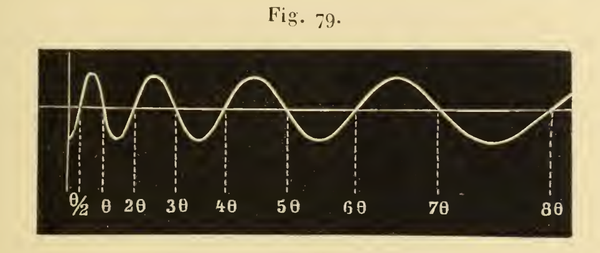
tera en ordonnées; on réunira les points par une courbe continue; une seconde opération identique donnera un certain nombre de valeurs de $F''(t)$; du reste on devra changer d'échelle chaque fois; les espaces parcourus étant, comme dans le cas spécial que nous allons examiner, d'environ un décimètre, tandis que les vitesses atteignent déjà plusieurs centaines de mètres.

Il est bien évident que dans ces deux opérations successives, et dans les nombreux calculs qu'elles nécessitent, des erreurs peuvent s'introduire, et qu'il serait bon d'avoir un moyen de les contrôler; l'intégraphe nous permettra de le faire très simplement.

L'exemple que nous donnons ici (*fig.* 78), d'après des dessins originaux résultant des expériences, ne se rapporte pas au mouvement du projectile dans l'âme, mais bien à des études nouvelles faites sur la perforation des plaques de blindage, en vue d'obtenir des indications sur leurs résistances.

Pour montrer les difficultés de l'expérimentation il suffira de faire remarquer que, si la durée du mouvement dans l'âme est de l'ordre des centièmes de seconde, la perforation d'une plaque

Fig. 79.



(comme on peut le voir d'après la figure), n'exige que quelques dix millièmes de seconde.

On opère cependant de la même manière, par l'étude du mouvement d'un mobile libre placé à l'intérieur du projectile, et dont le mouvement relatif, par rapport à celui-ci, est le même que celui du projectile par rapport à un mobile fictif qui continuerait son mouvement après le choc, après la même vitesse.

Un curseur mobile est guidé par une tige; il porte un diapason dont on connaît la durée de vibration; ce diapason est muni d'une petite barbe qui peut frotter légèrement sur la tige préalablement noircie; ses deux branches sont maintenues écartées par un coin fixe.

Le curseur est placé à la partie postérieure du projectile, et maintenu en place par une goupille; au moment du choc, celle-ci casse; le curseur, continuant à se mouvoir avec la vitesse d'avant le choc, se déplace d'arrière en avant, et le diapason rendu libre se met à vibrer en traçant sur la tige une ligne ondulée dont les intersections avec la médiane déterminent des temps égaux θ correspondant à une vibration simple (*fig.* 79).

On a donc, pour chaque position du curseur, le temps qui lui correspond.

On voit de suite que l'origine du mouvement est inconnue, puisque le diapason n'a pu commencer à vibrer qu'après que le curseur a parcouru un espace égal à l'enfoncement du coin.

En traçant la courbe des vitesses, on trouvera une valeur finie pour $t = 0$, et l'on déterminera l'origine du mouvement en la raccordant tangentiellement à l'axe (*fig.* 78).

La courbe des accélérations nous indiquera à chaque instant la force avec laquelle réagit la plaque et, par suite, nous donnera des indications utiles sur sa résistance.

Pour avoir une meilleure idée du phénomène, il faudrait avoir cette réaction en fonction, non pas du temps, mais bien de la pénétration elle-même; pour cela, il faut déduire de la courbe des espaces relative au curseur les espaces parcourus réellement par le projectile depuis le choc.

Cela est facile, connaissant la vitesse du projectile avant qu'il atteigne la plaque.

Soit V_0, cette vitesse, on aura pour la valeur de la pénétration p en chaque instant :

$$p = V_0 t - e.$$

En effet, soit V la vitesse du boulet à un moment quelconque

$$V = V_0 - \int_0^t w\, dt,$$

mais on a aussi, si v est la vitesse du curseur :

$$v = \int_0^t w\, dt,$$

d'où

$$V = V_0 - v \text{ et } p = \int_0^t V\, dt = \int_0^t V_0\, dt - \int_0^t v\, dt = V_0 t - e$$

(le temps $t = 0$ étant celui du commencement du choc.)

On aura donc pour chaque valeur de t la pénétration du projectile et la réaction de la plaque, en multipliant par la masse du projectile.

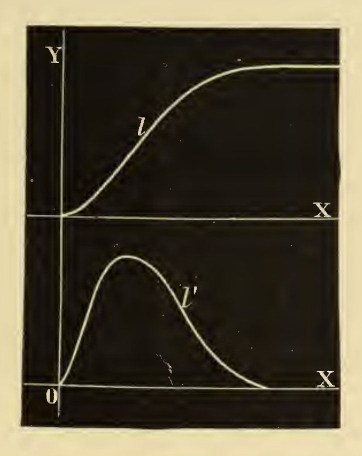
Dans notre figure, nous avons indiqué les trois courbes données par l'expérience et la différentiation graphique; l'intégraphe nous a permis de voir que celle des vitesses est assez exacte; mais il a fallu modifier considérablement la courbe des accélérations, pour

que, en intégrant, on retombe sur celle des vitesses, ou plutôt sur une courbe qui ne s'en éloigne pas trop.

m. — Quelques applications électriques.

40. *Courant induit et courant inducteur.* — Comme le cou-

Fig. 80.



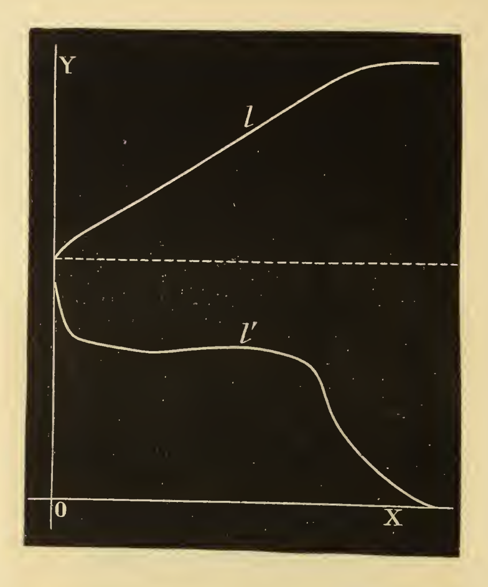
rant induit est toujours proportionnel à la dérivée du courant inducteur par rapport au temps, on peut toujours trouver, en intégrant la courbe qui représente le courant induit en fonction du temps, une autre courbe qui montrera la forme du courant inducteur.

Ainsi, dans le cas où l' (*fig.* 80) représente le courant induit, la courbe intégrale l indique comment doit varier le courant primaire pour obtenir le courant secondaire conforme à la courbe l'.

41. *Courbe des coulombs.* — Si l'on représente la décharge d'une pile par une courbe l' (*fig.* 81) en portant les temps comme abscisses et les intensités comme ordonnées, et si l'on trace la courbe intégrale correspondante l, les ordonnées de cette dernière représenteront la quantité d'électricité fournie, jusqu'à un moment quelconque de la décharge.

Elle sera donnée en *coulombs*, si les temps sont comptés en

Fig. 81.



secondes et les intensités en *ampères*, ou en *ampères-heures*, si les temps sont comptés en heures.

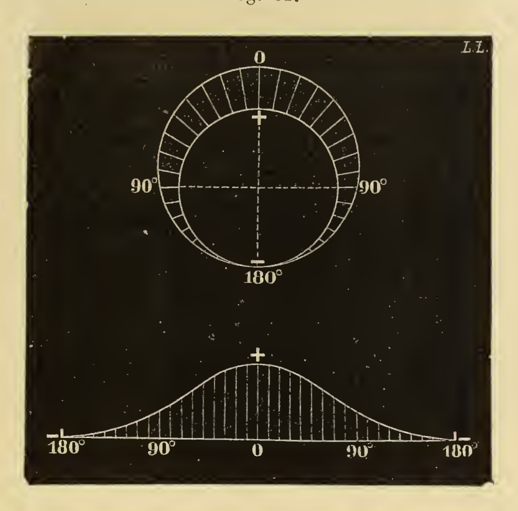
42. *Courbe du potentiel sur les collecteurs des machines dynamo-électriques.* — Le professeur Silv. Thompson a appliqué d'une manière très ingénieuse la courbe intégrale à l'étude de la distribution du potentiel sur les collecteurs des machines dynamo-électriques (¹). Si l'on relie un des balais d'une machine dynamo-électrique avec une des bornes d'un voltmètre, et si l'autre borne est réunie à un petit frotteur que l'on peut appuyer sur un point quelconque de la circonférence du collecteur, le voltmètre indique différentes déviations pour les différentes positions de contact. Supposons que le cercle de la *fig.* 82 représente le collecteur et les signes + et — la position des balais. En portant sur le rayon, en chaque point de la circonférence, les valeurs des indications galvanométriques correspondantes, on obtient une courbe repré-

(¹) Voir *La Lumière électrique*, 29 mars 1884, n° 13.

sentée sur la figure. En développant la circonférence du cercle sur une droite, on obtient la courbe indiquée en bas de la même figure. C'est une sinusoïde, dans le cas où le champ magnétique est uniforme. La variation d'inclinaison de cette courbe donne certaines indications sur la valeur de l'induction dans les différentes positions des bobines dans l'anneau. La forme générale de cette courbe peut donner des indications intéressantes sur les conditions du champ magnétique d'une machine que l'on étudie.

La courbe représentée sur la *fig.* 82 montre évidemment com-

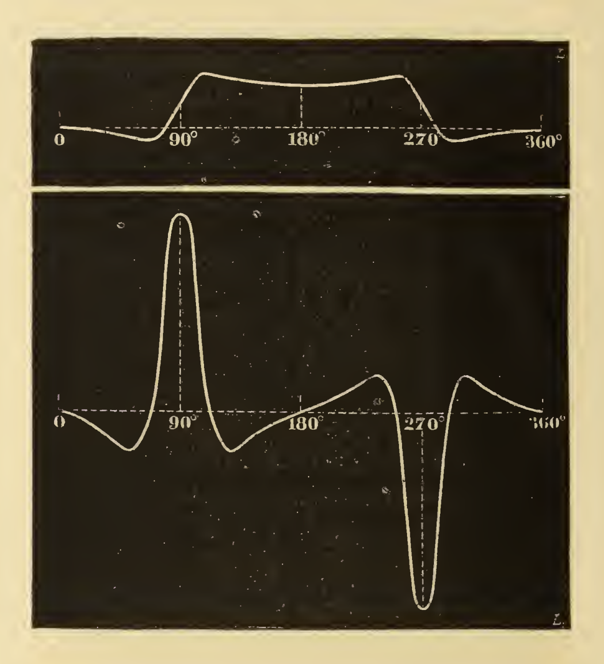
Fig. 82.



ment s'accroît ou comment diminue la différence de potentiel quand on s'éloigne de l'un des balais. Dans chaque position du frotteur mobile, on obtient la somme de l'effet produit entre le balai et le point de contact du frotteur, ce qui veut dire que chaque ordonnée de cette courbe est égale à la somme de toutes les inductions intermédiaires. On voit donc immédiatement qu'elle est une courbe intégrale d'une autre courbe dont les ordonnées seraient proportionnelles à l'induction produite dans chacune des bobines de l'anneau, dans leur passage à une position déterminée. Pour trouver cette courbe, étant donnée une machine quelconque, il suffit, comme l'ont indiqué S. Thompson et le docteur Isenbeck, d'avoir deux frotteurs, solidaires l'un de l'autre, et dont la

distance est égale à celle de deux lames voisines du collecteur. Les deux frotteurs étant réunis aux bornes d'un voltmètre et étant appuyés, dans une position quelconque, contre la surface du col-

Fig. 83.



lecteur, la lecture de la déviation donne la différence de potentiel qui correspond au passage des bobines par l'endroit indiqué. En promenant ce balai à deux contacts sur toute la circonférence du collecteur, et en portant les valeurs obtenues en ordonnées, prenant pour l'axe des abscisses le développement en ligne droite de la circonférence du collecteur, on obtient une courbe dont la forme, pour un cas spécial, est donnée par la *fig.* 83 (la courbe inférieure). La courbe supérieure est la courbe intégrale correspondante.

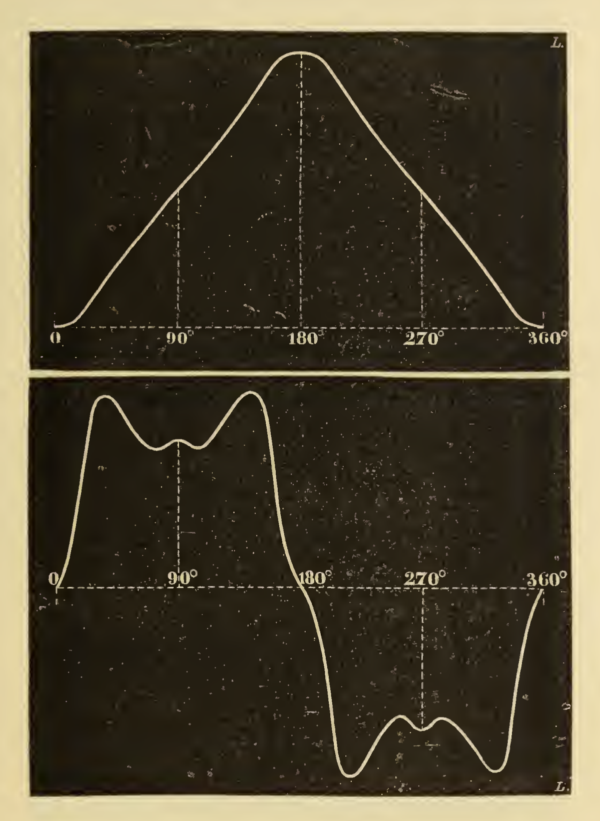
La courbe donnée est celle qu'a obtenue le docteur Isenbeck, avec son appareil décrit dans *La Lumière électrique* (¹).

(¹) G. Lippman, *vol.* X, p. 89.

La courbe intégrale a été obtenue par le professeur S. Thompson, au moyen de l'intégraphe de C.-V. Boys.

La courbe donnée représente l'induction obtenue avec la bobine

Fig. 84.

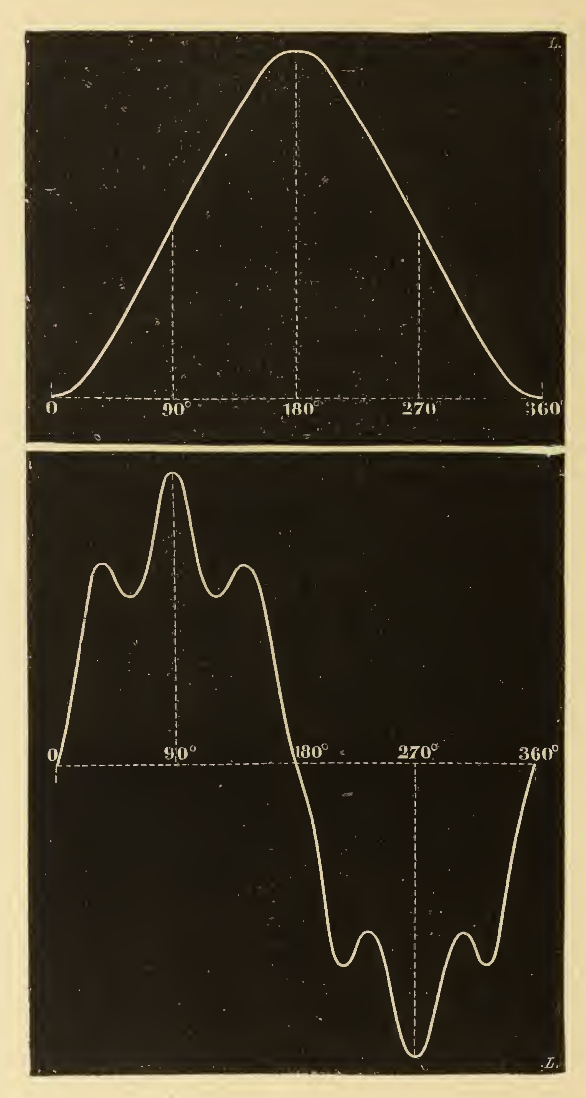


de l'appareil Isenbeck, montée sur noyau en bois et traversant le champ magnétique formé par des aimants sans épanouissements polaires. On voit que le sens de l'induction varie plusieurs fois, ce qui, naturellement, est nuisible parce qu'on ne récolte aux balais que la somme algébrique des courants induits. On voit clairement les défauts sur la courbe intégrale et, si une machine dynamo complète présentait des irrégularités pareilles, elle serait bien défectueuse.

Si l'on introduit dans l'appareil d'Isenbeck des épanouissements

polaires, formant deux arcs presque semi-circulaires, et si l'on prend un noyau en fer, l'apparence des courbes change immédiate-

Fig. 85.



ment. La *fig.* 84 indique la forme de la courbe d'induction et la courbe intégrale correspondante. On voit qu'il n'y a plus d'inver-

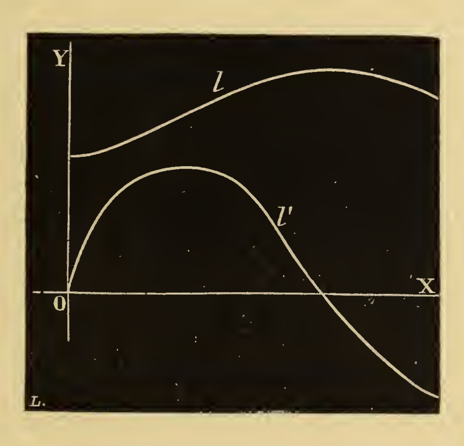
sion des courants et que le maximum de la courbe intégrale est éloigné de 180° du minimum, ce qui indique que les balais doivent appuyer sur les deux extrémités d'un diamètre du collecteur.

Si l'on introduit dans la bobine un aimant intérieur, ayant des pôles S et N en face des pôles extérieurs correspondants, la courbe de l'induction et son intégrale seront représentées par la *fig.* 85. On voit que dans ce cas la courbe intégrale se rapproche encore plus de la forme théorique sinusoïdale représentée par la *fig.* 82.

Ce genre d'exploration des machines dynamo-électriques peut être d'une grande valeur pour la recherche des défauts dans les machines défectueuses.

43. *Courbe de la variation du nombre de lignes de force*

Fig. 86.



coupées. — On sait que le courant induit dans un circuit électrique se mouvant dans un champ magnétique est proportionnel à la dérivée, par rapport au temps, du nombre des lignes de force traversant l'aire du circuit.

En intégrant par conséquent la courbe l' (*fig.* 86) représentant le courant induit en fonction du temps, on obtient une courbe l qui donne la variation du nombre des lignes de force traversant le circuit.

L'inspection de la figure montre que, lorsque le maximum et le

minimum des lignes de force traversent le circuit, le courant induit est nul.

Ceci peut nous servir à donner plus de clarté à la règle de Maxwell d'après laquelle un circuit parcouru par un courant cherche toujours à se placer de manière à embrasser le plus grand nombre de lignes de force. En effet, dans toute position intermédiaire, un circuit parcouru par un courant est soumis à un effort tendant à le faire mouvoir vers la position où il embrasse le plus grand nombre de lignes de force. La position où le circuit embrasse le minimum de lignes de force est une position d'équilibre instable; c'est-à-dire qu'à ce moment l'effort magnétique agissant sur le circuit est bien zéro, comme dans la position du maximum; mais, tandis que l'effort magnétique tend toujours à ramener le circuit à la position du maximum lorsqu'il s'en écarte, ce même effort tend au contraire à augmenter l'écart de la position du minimum.

n. — Applications pratiques du nouveau système d'intégrateurs [1].

44. Il est facile de voir que les intégrateurs appliqués dans les instruments que nous avons décrits dans les chapitres précédents peuvent remplacer le plateau totalisateur avec sa roulette, ordinairement employés jusqu'à présent dans les indicateurs des machines à vapeur, les dynamomètres enregistreurs, les appareils météorologiques, les compteurs d'électricité, etc.

Il s'agit alors tout simplement de faire incliner la roulette, suivant les exigences du phénomène que l'on enregistre, et de faire mouvoir le cylindre (ou le plan) suivant les variations des x introduits, qui peuvent représenter le temps, l'espace parcouru ou une autre variable indépendante.

Ainsi, par exemple, si l'on fait marcher le cylindre de la *fig.* 15 synchroniquement avec les mouvements du piston d'une machine à vapeur, et si l'on fait incliner la roulette suivant la pression de la vapeur, le nombre des tours du cylindre donnera le travail dépensé dans le cylindre.

---

[1] Voir *Comptes rendus;* 7 mars 1881.

Prenons un autre exemple. Si nous faisons incliner la roulette, dans les conditions exigées par le principe tangentiel de mes intégrateurs, suivant les intensités du courant qui parcourt un conducteur, et si nous faisons mouvoir le cylindre par un mouvement d'horlogerie, le nombre de tours de ce cylindre donnera la somme de I dt, ou la quantité d'électricité qui a passé dans le circuit pendant un temps déterminé.

En faisant incliner la roulette suivant le produit EI, on obtient $\int \mathrm{EI}\,dt$, ou le travail électrique.

On pourrait multiplier à volonté les applications de ce genre, en modifiant suivant les besoins qui se présentent les formes des organes, et depuis que j'ai publié le principe des intégrateurs donnant l'intégrale par le déplacement de la roulette, on a fait une série d'applications, sans pourtant arriver à des résultats tout à fait pratiques.

La plus grande difficulté, c'est d'obtenir un enregistrement continu, parce que la course suivant l'axe des x est limitée, et qu'il faut avoir recours à des artifices de construction.

Mais il y a des cas où cet inconvénient est éliminé, comme, par exemple, dans l'ingénieux indicateur totalisateur de M. C. Vernon Boys, que nous allons décrire, et dans lequel l'intégrateur est appliqué d'une manière très ingénieuse.

Il est représenté par les *fig.* 87, 88, 89 (¹).

Les espaces des deux côtés du piston de la machine à vapeur communiquent par B et B′ avec le corps cylindrique de l'indicateur, dans lequel se trouve le petit piston, avec son ressort. Les changements de position du piston font incliner, par l'intermédiaire d'un levier, la roulette intégrante G, qui s'appuie, contre le cylindre totalisateur H, calé à rainure et languette sur h.

Le cylindre H reçoit son mouvement de translation, correspondant au mouvement de la crosse du piston, par l'intermédiaire d'un brin.

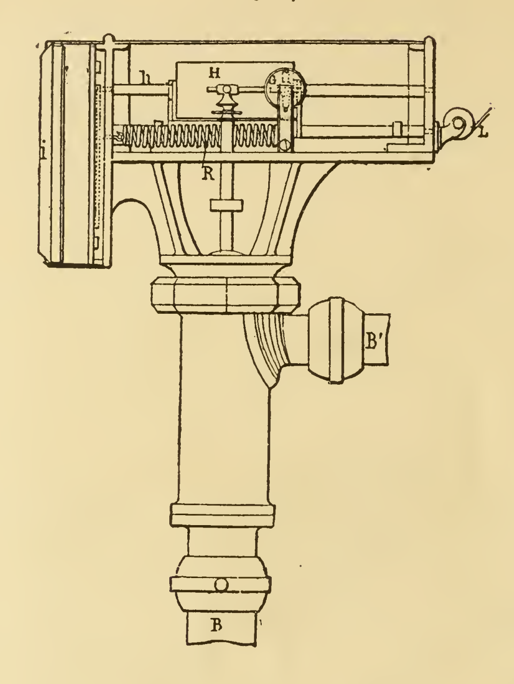
Le nombre des tours du cylindre est enregistré par un compteur ordinaire I.

En modifiant l'appareil, on peut combiner un indicateur qui

(¹) Voir *La Lumière électrique*, *vol.* XIV, 1884, p. 369. G. Richard : *l'Indicateur*.

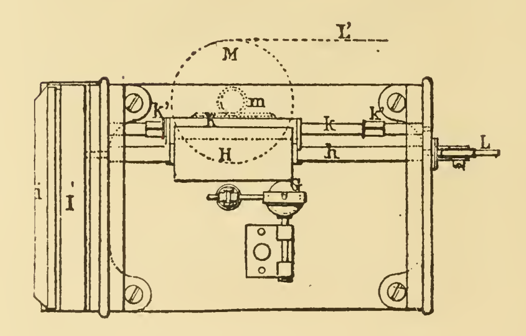
tracerait directement la courbe intégrale du diagramme ordi-

Fig. 87.



naire, soit sur la surface d'un cylindre, soit sur celle d'un plan.

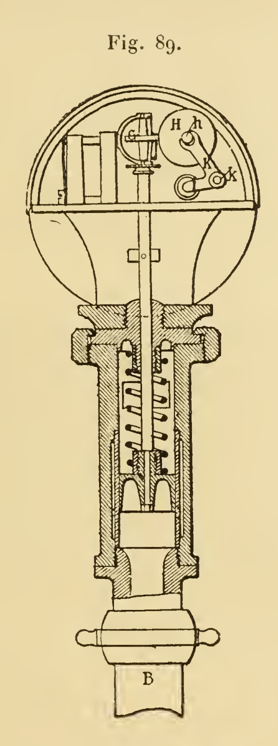
Fig. 88.



Pour les appareils délicats, comme, par exemple, les compteurs d'électricité, enregistreurs météorologiques, etc., l'emploi du cy-

lindre mobile et de la roulette ayant un axe fixe dans l'espace, est avantageux, parce qu'on dépense un travail extrêmement petit pour produire les variations d'inclinaison de la roulette, ce qui tient à ce fait que la roulette n'appuie que sur un point et qu'il faut un effort très faible pour la faire dévier. L'inertie de la roulette et de

Fig. 89.



sa monture est tellement faible, qu'elle ne joue presque aucun rôle, et qu'il n'y a pas de frottements considérables à vaincre comme dans les intégrateurs ordinairement employés.

APPENDICE.

APPLICATION DE LA ROULETTE AU TRACÉ DE QUELQUES COURBES.

La propriété fondamentale de la roulette, appliquée dans tous mes intégrateurs, de tendre toujours à se déplacer dans son plan, peut être utilisée dans la construction d'instruments destinés à tracer différentes courbes.

Toutes les courbes, pour lesquelles la loi déterminant l'inclinaison de la tangente avec les axes, dans le cas des coordonnées rectangulaires, ou avec le rayon vecteur dans le cas des coordonnées polaires, est déterminée géométriquement, peuvent être tracées par un appareil à roulette, dans lequel l'orientation de celle-ci sera déterminée par un dispositif mécanique réalisant la loi géométrique donnée.

Le tracé de la courbe intégrale n'est qu'un cas particulier, dans lequel l'inclinaison de la tangente est déterminée en chaque instant par la loi, très générale il est vrai,

$$\tang \alpha = y$$

où y est l'ordonnée d'une courbe donnée quelconque et α l'angle que fait la tangente à la courbe intégrale avec l'axe des x.

a) *Spirale logarithmique.* — Une courbe intéressante, à cause de ses applications dans le calcul graphique, est la spirale logarithmique. Comme on le sait, cette courbe est représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$r = ae^{k\varphi}$$

et sa propriété caractéristique est que la tangente à la courbe fait un

angle constant avec le rayon vecteur. Cette propriété nous donne immédiatement la possibilité de tracer mécaniquement la spirale logarithmique au moyen d'une roulette. Supposons un cadre formé de deux glissières, et tournant autour d'un point fixe appartenant à l'axe de ce cadre; sur les glissières se déplace un chariot portant une roulette, de telle sorte, que l'angle de la roulette et de l'axe du bâtis puisse prendre une valeur quelconque.

Il est évident maintenant que si l'on fixe l'étrier de la roulette de manière que l'angle de celle-ci avec l'axe du bâtis soit constant, et qu'on imprime à ce dernier un mouvement de rotation autour de son point fixe, ce chariot va se déplacer le long des glissières et la roulette décrira sur le papier la spirale logarithmique déterminée par l'angle initial.

On pourrait se servir d'un papier spécial au moyen duquel la roulette laisserait une trace; mais il est évidemment préférable d'avoir la courbe tracée par un tire-ligne.

Le problème se ramène donc à trouver un autre point du plan qui décrive aussi une spirale logarithmique; d'après les propriétés de cette courbe, on sait que les points où la tangente et la normale rencontrent la perpendiculaire au rayon vecteur décrivent des courbes identiques à la spirale donnée; il serait assez facile au moyen d'un système de coulisses de placer le tire-ligne en un de ces deux points; mais cela entraînerait nécessairement des frottements et compliquerait l'appareil.

Il est plus simple pour la construction pratique, de placer le tire-ligne en un point quelconque du rayon vecteur; on obtient ainsi une courbe qui satisfait à l'équation générale

$$r = ae^{k\varphi} + b,$$

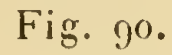
où b représente la distance du tire-ligne au centre de la roulette. La spirale logarithmique ne serait qu'un cas particulier de cette courbe plus générale, dans lequel le cercle asymptotique de rayon b se réduit à un point. Pour le calcul il suffit alors de retrancher ou d'ajouter une même quantité b à chaque rayon vecteur.

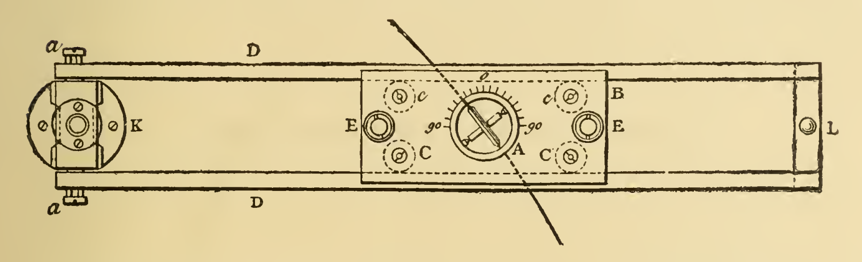
Comme on le voit par la *fig.* 90 qui représente le modèle de cet appareil, la roulette est portée par un cylindre A creux muni d'un repère et pouvant tourner entre deux joues B formant le corps

du chariot; on peut ainsi tracer les courbes correspondant à des spirales d'un angle quelconque, au moyen du repère et de la graduation gravée autour du cylindre.

Le chariot est porté par quatre galets horizontaux C, c qui roulent le long des deux glissières D, D formant le bâtis.

Le tire-ligne peut être fixé dans l'une ou l'autre des douilles E, E.


Fig. 90.



Le bâtis est supporté par une douille pénétrant dans un canon qui détermine le centre de la courbe; ce canon fait lui-même partie d'un disque K muni de trois pointes que l'on fixe sur le papier.

La douille est solidaire de la traverse du bâtis, et celui-ci peut en outre pivoter autour des pointes a, a, de sorte que l'on peut relever l'appareil du papier sans changer le centre.

b) *Courbe exponentielle.* — La courbe bien connue déterminée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = ae^{bx}$$

peut également être tracée mécaniquement au moyen d'un appareil à roulette très simple, en se basant sur la propriété caractéristique de la constance de la sous-tangente.

L'appareil le plus simple consisterait en un bâtis glissant le long d'une parallèle à l'axe des x, soit en le montant sur galets, soit au moyen d'un assemblage à languette.

Ce bâtis porte lui-même un chariot pouvant se déplacer dans la direction perpendiculaire au premier mouvement; sur ce chariot est fixé l'étrier de la roulette, de telle sorte qu'il puisse tourner librement autour d'un axe vertical.

L'orientation de la roulette serait alors déterminée par l'incli-

naison d'une tige pouvant coulisser dans une douille, fixée sur un bras rigide faisant partie du bâtis principal ; le plan de la roulette serait alors toujours dans le plan vertical passant par cette tige.

La douille doit elle-même être mobile autour d'un axe vertical dont la trace sur le papier décrirait, pendant le mouvement, l'axe des x.

Pour tracer la courbe au moyen d'un tire-ligne, il faudra encore user d'un artifice : le plus simple serait de prendre deux roulettes, et de placer le tire-ligne au milieu.

QUADRATURE DES DIAGRAMMES OBTENUS PAR LE DYNAMOMÈTRE D'INERTIE DE M. DESDOUITS.

M. Desdouits, ingénieur aux chemins de fer de l'État, a imaginé un dynamomètre très simple et très ingénieux, destiné à l'étude des systèmes en mouvement, et qui a été appliqué avec succès à l'étude des efforts moteurs et résistants développés dans la traction des trains de chemins de fer (1).

Ce dynamomètre *d'inertie* enregistre la courbe des accélérations, en fonction du temps, dont les courbes intégrales représentent les courbes de vitesse et celle des espaces parcourus.

Nous laissons la parole à M. Desdouits, pour la description du principe et de la forme la plus simple de son dynamomètre.

« Si, dans un système en mouvement de masse M, on considère isolément un élément de petites dimensions m, on peut, suivant la règle de d'Alembert, poser les relations d'équilibre entre les forces réelles et fictives qui le sollicitent, savoir : les forces de liaison qui rattachent la masse considérée au reste du système; l'action de la pesanteur appliquée en son centre de gravité, enfin les *forces d'inertie* de ses différents points. Si les forces de liaisons sont telles qu'on puisse les déterminer en grandeur et en direction, l'action de la pesanteur étant également connue, les relations d'équilibre donneront la valeur des forces d'inertie : en d'autres termes, elles feront connaître l'accélération totale de la masse m.

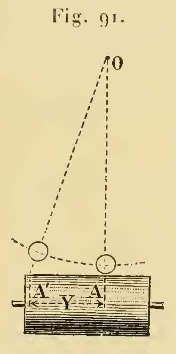
---

(1) *Revue générale des chemins de fer;* octobre 1883.

» Dans le cas le plus général du mouvement des systèmes matériels, il faut et il suffit que l'accélération de *trois* éléments de masse soit ainsi déterminée pour qu'on en puisse conclure l'état dynamique du système entier.

» Si nous admettons, pour rentrer dans les conditions plus simples de la pratique, que le mouvement d'ensemble se réduise, soit à une translation dans un plan, soit à une rotation suivant une circonférence de grand rayon ([1]), tous les points du système auront la même accélération. Il suffira de considérer l'équilibre relatif d'*un* élément de masse *m*. L'accélération w de cet élément, ou sa force d'inertie mw étant déterminée, on en conclura la force d'inertie Mw du système total, égale à la *résultante des forces extérieures* qui lui sont appliquées.

Fig. 91.



» La grandeur absolue de la masse dynamométrique *m* est évidemment arbitraire, et entièrement indépendante des dimensions et de la masse du système total. On peut la prendre aussi petite que l'on voudra, sans que la précision des mesures en soit en rien affectée. Qu'il s'agisse de déterminer les conditions dynamiques d'un train de chemin de fer lourdement chargé ou d'un navire du plus fort tonnage, cette étude n'exigera que l'emploi d'un appareil *portatif*.

» Une forme tout à fait élémentaire de cet appareil est la suivante : une petite masse *m* formant pendule peut osciller dans un plan parallèle à la direction du mouvement : ce pendule prend à

([1]) Le mouvement d'un train de chemin de fer, soit en alignement droit, soit en courbe, rentre dans l'un ou l'autre de ces deux cas

chaque instant une position angulaire, déterminée par la valeur de l'accélération positive ou négative w dont le système est animé [1]. Pour un écart angulaire α, l'accélération de la pesanteur étant g, on a :

$$\tan g\alpha = \frac{w}{g}.$$

» Un crayon monté dans le prolongement de la tige du pendule, et constamment poussé par un ressort, s'appuie sur la génératrice supérieure d'un tambour à axe horizontal (*fig.* 91); ce tambour étant animé d'un mouvement de rotation continu, la pointe du crayon trace un diagramme dont les ordonnées représentent l'accélération à chaque instant. On a, en effet,

$$AA' = y = OA \tan g\alpha = OA\,\frac{w}{g}.$$

ce qui donne pour l'accélération :

$$w = \frac{g}{OA}\,y,$$

et pour l'effort total appliqué au système

$$F = Mw = \frac{Mg}{OA}\,y;$$

$\frac{OA}{g}$ est l'échelle des accélérations; $\frac{OA}{Mg}$ est l'échelle des forces.

» Le mouvement du tambour enregistreur peut être commandé, soit au moyen d'une transmission qui produit un entraînement proportionnel aux espaces parcourus, soit par un mécanisme d'horlogerie qui donne des abscisses proportionnelles aux temps. Ce dernier mode de commande a le grand avantage de n'exiger aucune dépendance entre le dynamomètre et le mécanisme moteur ou les essieux. Il est aussi, dans la plupart des cas, le plus favorable pour

---

(1) Nous supposons ici un mouvement de translation rectiligne; c'est celui d'un train de chemin de fer en alignement droit. Pour le mouvement en courbe, on aurait à considérer séparément l'accélération tangentielle et l'accélération centripète dans un plan perpendiculaire; cette dernière est d'ailleurs déterminée par la connaissance du rayon de la courbe.

l'analyse des résultats. Nous le supposerons employé d'une manière normale.

» Dans ces conditions, le diagramme représente la loi des accélérations en fonction du temps :

$$\frac{dv}{dt} = w = f(t).$$

» La quadrature de ce diagramme, effectuée par ordonnées successives, donne la loi des vitesses :

$$\int \frac{dv}{dt}\, dt = \int dv = v - v_0.$$

» Si l'on traduit cette dernière relation par le tracé d'une courbe, une nouvelle quadrature fournira la loi des espaces :

$$\int v\, dt = \int \frac{de}{dt}\, dt = \int de = e - e_0.$$

» On voit que, sans aucune complication de mécanisme auxiliaire, cet appareil fonctionne à la fois comme *dynamomètre*, comme *tachymètre* et comme *stadiomètre*.

» La forme très simple qu'on vient d'indiquer est susceptible d'une exécution pratique. Elle convient pour la mesure des efforts dont la valeur est grande relativement à la masse actionnée : ainsi, elle a été avantageusement appliquée à l'étude des *freins continus*, dont l'énergie atteint 15 à 20 pour 100 du poids du train.

» Elle serait, au contraire, d'une application médiocre pour la mesure de forces relativement faibles, comme celles qui se développent dans les circonstances ordinaires de la marche des trains, et dont la valeur ne dépasse guère 8 à 10 millièmes du poids total.

» L'écart du pendule ne serait alors que de quelques millimètres par mètre, et l'on ne pourrait obtenir une échelle convenable des ordonnées, qu'en donnant à la tige une longueur démesurée, ou en donnant des multiplications de mouvement, expédient qui laisse beaucoup à désirer. »

Pour des applications spéciales, M. Desdouits a construit d'autres appareils qui fonctionnent exactement suivant le même prin-

cipe, mais dont la sensibilité varie à volonté entre les limites les plus étendues [1].

Comme exemple, nous allons citer les observations sur le fonctionnement de divers freins continus. Les courbes intégrales obtenues par le calcul ne sont pas disposées sur les figures, comme nous avons eu l'habitude de le faire dans nos figures précédentes, mais le lecteur retrouvera facilement leurs relations avec les courbes données.

Voici le texte de M. Desdouits :

« Il a été fait aux chemins de fer de l'État une série complète d'expériences sur les divers systèmes de freins continus appliqués

	POIDS		
	freiné.	non freiné.	total.
1 Machine G. V.	»	34 t.	34 t.
1 Tender	16 t.	»	16
8 Véhicules remorqués (voitures et fourgons	90	»	90
Total	106 t.	34 t.	140 t.

dans des conditions exactement comparables à des trains de composition identique effectuant régulièrement les mêmes parcours à tour de rôle.

» De nombreux diagrammes ont été relevés sur ces trains : ils ont permis de faire une analyse détaillée du fonctionnement des freins et, dans plus d'une occasion, ils ont indiqué les améliorations à réaliser. Nous ne saurions entrer ici dans le détail de ces essais. »

Nous nous bornerons à reproduire, à titre d'exemple, un diagramme relevé pour chacun des freins, dans des conditions moyennes. L'analyse de ce diagramme fait aisément ressortir les traits caractéristiques de chaque système.

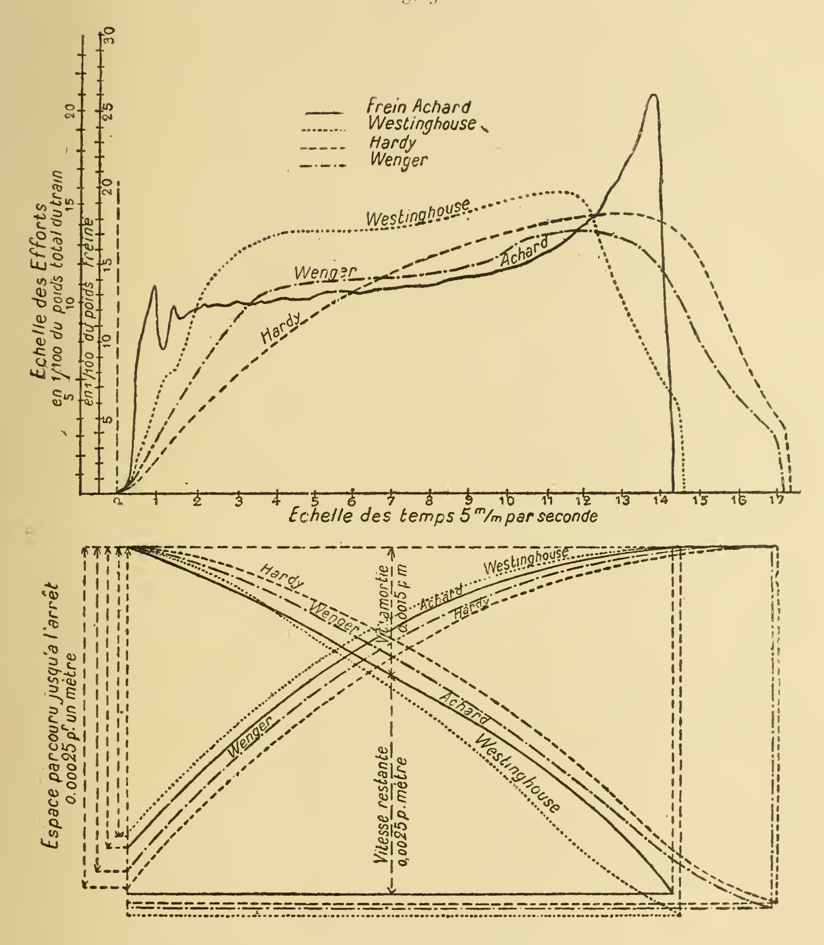
« Pour rendre la comparaison plus sensible, nous avons super-

---

(1) Voir *La Lumière Électrique*, Vol. XII. Dubost : *Dynamomètre d'inertie.*

posé, à partir de leur origine, les courbes représentatives des

Fig. 92.



divers freins (¹), ainsi que l'indique la légende de la *fig.* 92.

(¹) Le montage du frein Westinghouse est le même qu'au chemin de fer de l'Ouest.

Le frein à vide Hardy est à une seule conduite, non automatique.

Le frein électrique Achard présente les mêmes dispositions générales qu'au chemin de fer de l'Est : toutefois, il a subi dans le cours des essais plusieurs améliorations importantes.

Le frein Wenger est disposé comme au chemin de fer d'Orléans. Pour ce dernier, d'ailleurs, les essais n'ont commencé que tout récemment.

» Tous les diagrammes correspondent à une vitesse initiale de 60^{km} (¹).

» La composition des trains est indiquée dans le tableau (col. 1re).

» Il résulte de ce tableau que la proportion du poids freiné au poids total est de 76 pour 100.

» L'échelle des diagrammes est :

Pour le temps : $0^m,005$ par seconde.

Pour les efforts : $0^m,0026$ par $\frac{1}{100}$ du poids total. — $0^m,0020$ par $\frac{1}{100}$ du poids freiné.

» *Serrage.* — Le frein électrique est celui dont le serrage est de beaucoup le plus rapide. Son action est *complète* après un intervalle notablement plus petit que 1 seconde, à partir de l'instant où a *commencé* la manœuvre. On peut dire que sous ce rapport important le frein électrique touche à la perfection.

» Le frein Westinghouse a encore un serrage rapide : la pression sur les sabots se manifeste instantanément, et croît progressivement pour atteindre sa pleine action, après 3 secondes environ.

» Dans l'appareil Smith-Hardy, le serrage se développe à partir de l'instant initial, suivant une progression régulière, mais assez lente. Il n'est guère complet (pour la totalité du train), qu'après 8 ou 10 secondes, durée qui diffère peu de celle exigée pour l'arrêt total en supposant une vitesse moyenne. Nous n'avons pas été à même d'observer comment varie la durée du serrage pour des trains de différentes longueurs, mais nous avons pu constater que l'action de ce frein dépend essentiellement de la manière de manœuvrer le robinet de l'éjecteur. On peut, en le manœuvrant brusquement, obtenir un serrage un peu plus rapide que celui de notre diagramme ; mais ce résultat n'est obtenu qu'aux dépens de la valeur absolue du vide, et de l'effort d'enrayage.

» Le frein Wenger serre un peu moins rapidement que le Westinghouse et plus vite que le frein à vide.

(¹) L'égalité des aires indique l'égalité des vitesses amorties.

» *Effort absolu.* — Nous nommons *effort absolu* la valeur qu'atteint la force retardatrice, lorsque le serrage est complet. Cette valeur dépend de la vitesse, à cause de la variation du coefficient de frottement. On peut convenir, pour plus de précision, de mesurer pour chaque frein l'effort absolu à une vitesse déterminée, par exemple, 50^{km}.

» Dans nos expériences, les efforts absolus ont oscillé autour des coefficients suivants :

Frein Westinghouse	18,5 du poids freiné.		
— Smith-Hardy	18 »	—	[1]
— Wenger....................	15 »	—	
— Achard....................	15 »	—	

» On remarquera que ces chiffres définissent les conditions de montage de chacun des freins sur nos trains d'essais, bien plutôt que la valeur des systèmes en eux-mêmes; au point de vue de la puissance absolue, tous les systèmes sont en réalité équivalents, et la limite de leur énergie est déterminée par la seule condition de l'adhérence.

» *Effort effectif.* — L'effort effectif, pour chaque frein, est la valeur de la force constante qui, appliquée au train pendant toute la durée de l'arrêt, aurait permis d'amortir la même vitesse dans le même parcours : c'est, en d'autres termes, le quotient de la demi-force vive initiale par la longueur de l'arrêt.

» La valeur de la vitesse initiale est fournie, pour chaque diagramme, par la quadrature de l'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. L'espace parcouru s'obtient par le calcul de l'aire de la courbe intégrale.

» On trouve ainsi, pour l'effort effectif des divers freins, dans les arrêts que nous avons pris pour type :

Frein Westinghouse.	12,1 du poids total	et	15,9 du poids freiné.	
— électrique.....	11 »	—	14,5	—
— Wenger.......	10,2	—	13,4	—
— Smith-Hardy..	9,2	—	12,1	—

(1) La valeur de l'effort absolu est difficile à déterminer pour le frein Hardy, à cause de son grand retard au serrage. On ne peut la déduire que des diagrammes d'arrêts effectués à très grande vitesse.

» On remarquera le relèvement du coefficient du frein électrique dû à la promptitude de son serrage.

» *Desserrage.* — Le frein électrique présente pour le desserrage, comme pour le serrage, une grande supériorité. La durée du desserrage complet est inférieure à toute appréciation.

» Pour les freins Westinghouse et Smith-Hardy, le desserrage complet n'exige pas moins de 4 à 5 secondes.

» Le frein Wenger paraît desserrer dans un temps plus considérable. Nous ne saurions toutefois conclure d'une manière absolue à cet égard, ce frein ayant été introduit tout récemment, et sa manœuvre n'étant pas encore bien connue des agents.

» On remarquera sur les diagrammes que, dans le cas du frein électrique, l'ordonnée s'élève beaucoup dans les derniers instants de l'arrêt, tandis que pour les autres freins elle s'abaisse progressivement, pour tomber à zéro à l'instant même de l'arrêt. Ce fait tient à la manière dont la manœuvre s'effectue suivant les cas.

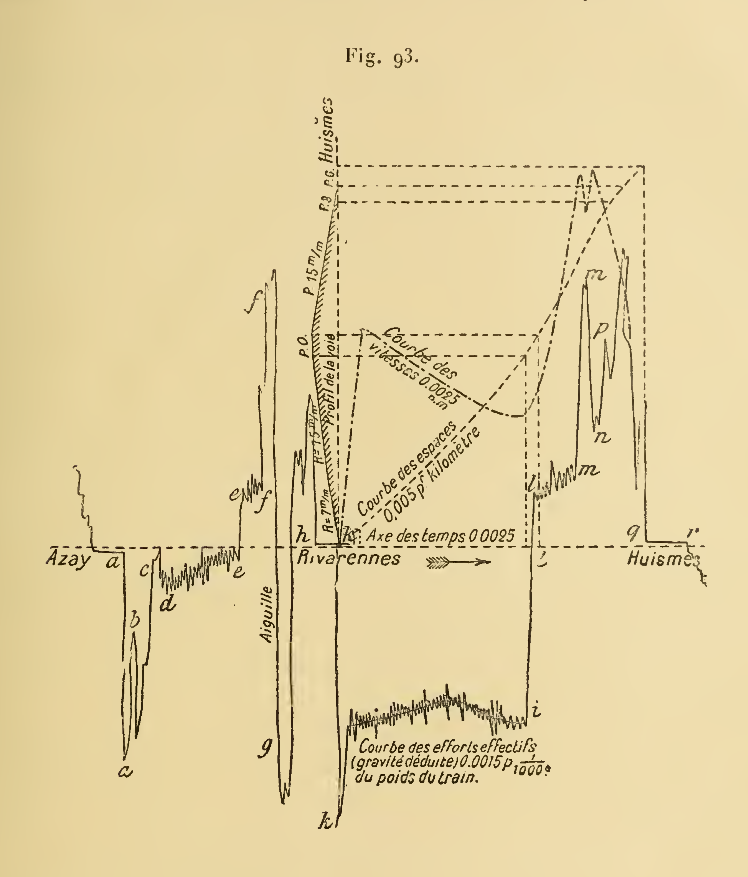
» Avec le frein électrique, le desserrage étant assuré dans un temps inappréciable, le machiniste peut maintenir la pression des sabots jusqu'au dernier tour de roue de la locomotive, et ne la faire cesser qu'un instant avant l'arrêt absolu, sans avoir à craindre de réaction fâcheuse dans l'ensemble du train. L'accroissement rapide qu'on observe dans la valeur de l'ordonnée correspond à l'augmentation du coefficient de frottement, phénomène sur lequel les travaux de M. le capitaine Douglas Galton ont attiré l'attention, et qui ressort très nettement de l'examen de nos diagrammes.

» Pour les freins *pneumatiques,* au contraire, il est nécessaire de commencer le desserrage plusieurs secondes à l'avance, pour permettre au train de se détendre avant l'arrêt. Si, par suite d'une fausse manœuvre ou de toute autre cause, le serrage total est maintenu jusqu'à la fin, on observe le même accroissement de l'ordonnée que dans le cas du frein électrique; mais il se produit à l'arrêt, ou quelques instants après, des secousses plus ou moins violentes. Ces secousses sont complètement évitées dans la manœuvre du frein électrique. »

Le deuxième exemple que nous donnons ici se rapporte au mouvement d'un train en marche normale.

« Le diagramme (*fig.* 93) a été relevé entre deux intervalles consécutifs de stations : d'Azay à Rivarennes, de Rivarennes à Huismes (ligne de Tours aux Sables : $224^{km}7$ — $217^{km}3$ — $206^{km}6$).

Fig. 93.



» Le trajet d'Azay à Rivarennes est en profil facile : palier ou rampes de $0^m,001$ à $0^m,003$. Celui de Rivarennes à Huismes est formé presque en entier par la succession d'une rampe de $0^m,015$ et d'une pente de même inclinaison et de longueur à peu près égale, séparées par un court palier; courbes de 500^m à 1000^m.

» Le train formé de 8 véhicules, d'un poids moyen de 11 tonnes, est remorqué par une machine à 4 roues couplées, de 2^m de diamètre.

» Poids total, 138 tonnes. — Poids remorqué, 78 tonnes.

» L'échelle des diagrammes est :

Pour les temps : $0^{m},0025$ par minute.

Pour les forces : $0^{m},0015$ par $\frac{1}{100}$ du poids total.

» Toutes les phases de la marche se dessinent sur le développement du diagramme.

» En *a*, au départ d'Azay, on observe une ordonnée de valeur considérable, correspondant à l'*effort de démarrage* (démarrage au petit régulateur, la marche en avant à fond de course).

» En *b*, diminution notable de l'ordonnée, par suite de la résistance due au passage du train sur l'aiguille de sortie de la gare, disposée pour donner accès sur la voie d'évitement.

» En *c*, le mécanicien ramène sa marche vers le point mort, puis il ouvre le régulateur en grand.

» De *d* en *e*, l'effort moteur est maintenu un peu au-dessus de la valeur de l'effort résistant ; la vitesse va en croissant progressivement jusqu'à 60^{km} environ.

» En *e*, fermeture du régulateur. A partir de ce point, l'ordonnée accuse la *résistance propre* du train.

» En *f*, action du frein pour l'arrêt à l'aiguille de Rivarennes, où doit avoir lieu un croisement.

» En *g*, mise en marche de la machine suivie de l'action du frein, à deux reprises.

» (L'égalité des aires positive et négative, à partir du passage à l'aiguille, indique que l'*arrêt complet* a été effectué réglementairement).

» De *h* en *k*, arrêt à Rivarennes.

» En *k*, démarrage. A partir de ce moment, la marche est maintenue à un cran élevé, pour lancer le train et lui permettre ensuite de gravir la longue rampe de $0^{m},015$.

» En *l* (arrivée au palier) fermeture du régulateur.

» En *m*, action de la contre-vapeur pour modérer la vitesse dans la descente : cette action est supprimée en *n*.

» En *p*, à l'approche de la station de Huismes, action du frein pour l'arrêt.

» De *q* à *r*, arrêt à Huismes.

» Toutes les circonstances intéressantes de la marche sont ainsi

enregistrées et contrôlées. — La quadrature du diagramme, combinée avec les indications de pentes fournies par le profil en long détermine la corrélation de tous ces faits avec la *vitesse* et avec la *position du train sur la ligne*.

» Nous avons fait cette opération pour la section du parcours comprise entre Rivarennes et Huismes.

» On reconnaît sur l'épure que le train a été lancé à partir de la station à une vitesse de 42^{km} à 43^{km}. Pendant la montée de la rampe, cette vitesse est tombée progressivement à 25^{km}. A partir du palier, elle est remontée rapidement jusqu'à une valeur de 72^{km}, à partir de laquelle on a fait usage de la contre-vapeur, qui l'a ramenée un peu au-dessous de cette limite; enfin la vitesse a été amortie aux approches de la station par l'action du frein.

» La longueur du trajet, déduite de l'épure, ne présente pas de différence appréciable avec celle qui résulte du kilométrage officiel. Ce résultat vérifie de la manière la plus concluante l'exactitude du fonctionnement de l'appareil.

» Nous pourrions relever sur le même diagramme des données dynamiques importantes, tant sur la résistance propre du train que sur la valeur effective des efforts produits dans le démarrage, dans la marche aux divers crans de la coulisse, dans l'action de la contre-vapeur.

» Nous devons nous contenter d'avoir signalé cette étude que nous ne pouvons aborder ici avec les développements qu'elle comporte. »

Je crois qu'il ne serait pas difficile de combiner, avec le dynamomètre d'inertie de M. Desdouits, mon intégrateur à roulette et cylindre qui ferait automatiquement la totalisation des indications du dynamomètre.

NOTE RELATIVE AUX ÉTUDES DE G. CORIOLIS SUR LE TRACÉ MÉCANIQUE DE CERTAINES COURBES.

Coriolis a étudié ([1]), en 1836, la forme que prend un fil tendu, enroulé autour d'un cylindre et adhérant par frottement à sa surface. Appliquant la propriété des courbes ainsi obtenues, d'après laquelle la direction des tangentes en chaque point est toujours celle de la partie du fil tendu avant qu'il s'enroule, il a indiqué le moyen de donner à ce fil la forme de plusieurs courbes dont l'équation différentielle se prêtait à la traduction mécanique. Cet appareil répond, comme on voit, à un cas très particulier. Nous reproduisons la description entière de ses appareils :

« Si l'on conçoit qu'un fil tendu s'enroule sur un cylindre, et que le frottement y soit assez fort pour empêcher ce fil de glisser le long de la surface contre laquelle il est enroulé, la courbe formée par le fil sur la surface du cylindre, développée ensuite sur un plan, jouira de la propriété que la direction de sa tangente sera toujours celle de la partie du fil tendue en ligne droite avant qu'elle s'enroule.

» Si donc on peut donner au fil, dans cette partie, une direction qui résulte de l'équation différentielle d'une courbe, celle-ci se trouvera tracée sur le cylindre, en prenant pour abscisses les arcs comptés sur la base du cylindre.

» Cette considération conduit à un tracé assez simple de plusieurs courbes.

» On voit de suite que l'exponentielle dont l'équation est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a} \quad \text{ou} \quad y\frac{dx}{dy} = a,$$

peut se décrire en enroulant sur un cylindre un fil tendu, qui passe toujours par un point fixe. Ce point doit être à la distance a de la génératrice du cylindre, qui se trouve dans le plan tangent mené par ce point.

» J'ai fait construire, d'après cette remarque, une machine au

([1]) *Journal* de Liouville, 1836, p. 5.

moyen de laquelle un fil tendu par un léger poids s'enroule ou se déroule autour d'un cylindre, en passant par un petit trou percé dans une plaque mobile, qu'on approche ou qu'on écarte à volonté du cylindre. Une aiguille et un cadran indiquent les tours et fractions de tours, dont on a tourné le cylindre. Ce sont ces quantités que représentent les exposants. Une échelle placée contre la génératrice du cylindre, sur laquelle se trouve toujours le point où le fil s'en sépare, indique, à partir du zéro de l'échelle, les exponentielles qui répondent aux exposants indiqués sur le cadran. On conçoit comment cette machine opère facilement tous les calculs d'intérêts composés. La marche de l'aiguille répond aux durées des placements, et les nombres qu'on lit sur l'échelle, au point où le fil se sépare du cylindre, indiquent ce que sont devenues les sommes placées, ou ce qu'elles doivent être pour l'escompte.

» La chaînette, dont l'équation différentielle est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1},$$

ou bien

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

se dessine d'une manière analogue à la logarithmique. Il suffira de placer, dans un plan tangent au cylindre, une poulie dont le centre soit sur la génératrice de contact et dont a soit le rayon. En faisant dérouler sur cette poulie le fil qui s'enroule sur le cylindre, il s'y pliera suivant une chaînette.

» Si l'on avait l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y f(x),$$

ou bien en faisant

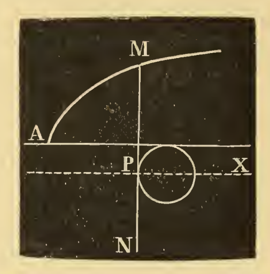
$$\frac{1}{f(x)} = \varphi(x),$$

$$y \frac{dx}{dy} = \varphi(x).$$

» On décrirait encore assez facilement la courbe qui répond à cette équation au moyen du relief de la courbe dont l'ordonnée

est $\varphi(x)$. Pour cela, il suffirait d'avoir d'abord (*fig.* 94) une règle AMX, dont un côté AX serait droit, et l'autre, AM, fermerait la courbe dont $\varphi(x) - r$ serait l'ordonnée, r étant le rayon du cylindre. Ensuite, on ferait tourner le cylindre en appliquant contre sa base la règle AX. Si le fil qui s'enroule reste dans le plan vertical PM, ce qui est facile à obtenir en l'appliquant contre un plan fixe, et qu'il passe ainsi sur la courbe AM en M, il est clair qu'il formera sur le cylindre une courbe telle qu'en se déroulant sur un plan elle satisferait à l'équation différentielle

Fig. 94.



ci-dessus, puisque la sous-tangente PM serait égale à $\varphi(x)$, x étant l'abscisse mesurée sur la base circulaire du cylindre.

» Il ne serait pas impossible non plus de décrire les courbes données en général par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

» Pour cela on concevrait d'abord une surface exécutée en relief, ayant pour ordonnée

$$\frac{y}{f(x, y)}.$$

» Ce relief tiendrait à une règle AX, comme tout à l'heure, contre AM, mais il n'y serait fixé que dans le sens des x; dans celui de l'axe des y, que je suppose ici vertical, c'est-à-dire parallèle à l'axe du cylindre, il serait parfaitement libre de monter et de descendre. Le mécanisme, pour cela, peut se disposer de plusieurs manières, très faciles à exécuter.

» Pendant qu'on tournerait le cylindre, en faisant avancer la

règle qui tient au relief dans le sens de l'axe des x, et la pressant contre la base du cylindre, on aurait soin de tenir le relief à la main, à une hauteur telle que l'axe des x fût toujours à la hauteur du point où le fil quitte le cylindre, c'est-à-dire au point décrivant la courbe en question. Alors, si le fil tendu en quittant le cylindre va passer par le point où la surface du relief est rencontrée par une perpendiculaire fixe PM, la courbe suivant laquelle il se pliera sur le cylindre, en la rapportant aux arcs de cercle pour abscisses, aura effectivement pour équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

car la sous-tangente sera toujours

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{y}{f(x, y)}.$$

» On devra placer le solide du relief en dehors de l'espace APM, et faire passer le fil à l'extrémité d'une tige PM, qui, par l'action d'un poids ou d'un petit ressort de pression, sera forcée d'appuyer en M, contre le relief.

» On peut s'arranger facilement pour que le petit poids p, qui tiendra le fil tendu, serve en même temps à appliquer la tige PM contre la surface. Il suffira de conduire d'abord le fil à travers un très petit trou percé à l'extrémité M de la tige, puis de le renvoyer horizontalement à l'autre extrémité N, où il passera sur une poulie tenant à cette même tige, pour revenir passer sur une autre poulie fixe en dessous de p et tout auprès, et pour soutenir le poids p; celui-ci tirera la tige de N en M avec la force $2p$, et de M en N, avec la force plus petite

$$p(1 + \cos\alpha),$$

α étant ici l'angle dont la tangente est égale $\frac{dy}{dx}$. La tige sera donc toujours pressée contre le relief.

» Pour que ce moyen de description de courbe soit praticable, il faut que le fil, une fois appliqué sur le cylindre, ne s'y dérange pas par l'effet de la flexion qu'il y prend. Il y a pour cela une relation nécessaire entre le rayon r du cylindre et la nature de la

courbe représentée par l'équation

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

» Soient M un point quelconque, MM′ un élément, et r le rayon de courbure en M de la courbe AMB formée par le fil enroulé sur le cylindre. Deux tensions contraires sollicitent l'élément MM′ à ses deux bouts; ces deux tensions donnent lieu à une résultante dont la direction coïnciderait avec le rayon r, si le frottement dans le sens du fil était nul : quelle que soit l'intensité du frottement, la direction de cette résultante sera située dans le plan osculateur de la courbe AMB, et fera avec le plan tangent en M, au cylindre, un certain angle ε. Cela posé, pour que le fil ne glisse pas sur la surface du cylindre, il faudra évidemment que l'on ait

$$\operatorname{tang}\varepsilon > \mu,$$

μ étant le rapport du frottement à la pression. On devra donc choisir le rayon r de manière que l'inégalité $\operatorname{tang}\varepsilon > \mu$ soit toujours satisfaite. »

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE V.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.

LIBRAIRIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55, A PARIS.

LÉVY (Maurice), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à l'École centrale des Arts et Manufactures. — **La Statique graphique et ses applications aux constructions**. 2e édition. 4 vol. grand in-8, avec 4 atlas de même format :

Ire Partie : *Principes et applications de la Statique graphique pure*. Grand in-8, de xxviii-549 pages, avec Atlas de 26 planches; 1886. 22 fr.

IIe Partie : *Flexion plane. — Lignes d'influence. — Poutres droites*. Grand in-8, de xiv-345 pages, avec Atlas de 6 planches; 1886.

IIIe Partie : *Arcs métalliques. — Ponts suspendus rigides. — Coupoles et corps de révolution* .... (*Sous presse*.)

IVe Partie : *Ouvrages de maçonnerie. — Systèmes réticulaires*. (*S. p.*)

PONCELET, Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique appliquée aux machines**, publié par M. Kretz, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. 2 volumes in-8, se vendant séparément :

1re Partie : *Machines en mouvement, Régulateurs et transmissions, Résistances passives*, avec 117 fig. et 2 pl.; 1874. 12 fr.

2e Partie : *Mouvements des fluides, Moteurs, Ponts-levis*, avec 111 figures; 1876................................ 12 fr.

RESAL (H.), Membre de l'Institut, Ingénieur des Mines, adjoint au Comité d'Artillerie pour les études scientifiques. — **Traité de Mécanique générale**, comprenant les *Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École des Mines*. 6 vol. in-8, se vendant séparément :

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Tome I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides*. In-8, avec 66 figures dans le texte; 1873.................................. 9 fr. 50 c.

Tome II : *Frottement. — Équilibre intérieur des corps. — Théorie mathématique de la poussée des terres. — Équilibre et mouvements vibratoires des corps isotropes. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. — Hydraulique. — Thermodynamique, suivie de la théorie des armes à feu*. In-8, avec 56 figures dans le texte; 1874...................... 9 fr. 50 c.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE (Moteurs et Machines).

Tome III : *Des machines considérées au point de vue des tranformations de mouvement et de la transformation du travail des forces. — Application de la Mécanique à l'Horlogerie*. In-8, avec 213 belles figures dans le texte; 1875.................................. 11 fr.

Tome IV : *Moteurs animés. — De l'eau et du vent considérés comme moteurs. — Machines hydrauliques et élévatoires. — Machines à vapeur, à air chaud et à gaz*. In-8, avec 200 belles figures dans le texte, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1876 .... 15 fr.

CONSTRUCTION.

Tome V : *Résistance des matériaux. — Constructions en bois. — Maçonneries. — Fondations. — Murs de soutènement. — Réservoirs*. In-8, avec 308 figures dans le texte, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 880.. 12 fr. 50

Tome VI : *Voûtes droites et biaises, en dôme, etc. — Ponts en bois. — [illegible]chers et combles en fer. — Ponts en fonte et en fer. — Ponts sus[illegible]. — Ponts-levis. — Cheminées. — Fondations des machines indu[illegible]. — Amélioration des cours d'eau. — Substruction des chemins [illegible]avigation intérieure. — Ports de mer*. In-8, avec 519 fi[illegible]e texte et 5 planches en couleur; 1881......... 15 fr.

— Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.